

THEORETICAL COMPETITION

January 9, 2024

Please read this first:

1. The time available for the theoretical competition is 4 hours. There are three questions.
2. Use only the pen provided.
3. You can use your own calculator for numerical calculations. If you don't have one, please ask for it from Olympiad organizers.
4. You are provided with *Writing sheet* and additional paper. You can use the additional paper for drafts of your solutions but these papers will not be checked. Your final solutions which will be evaluated should be on the *Writing sheets*. Please use as little text as possible. You should mostly use equations, numbers, figures and plots.
5. Use only the front side of *Writing sheets*. Write only inside the boxed area.
6. Begin each question on a separate sheet of paper.
7. Fill the boxes at the top of each sheet of paper with your country (**Country**), your student code (**Student Code**), the question number (**Question Number**), the progressive number of each sheet (**Page Number**), and the total number of *Writing sheets* used (**Total Number of Pages**). If you use some blank *Writing sheets* for notes that you do not wish to be evaluated, put a large X across the entire sheet and do not include it in your numbering.
8. At the end of the exam, arrange all sheets for each problem in the following order:
 - Used *Writing sheets* in order.
 - The sheets you do not wish to be evaluated.
 - Unused sheets.
 - The printed problems.

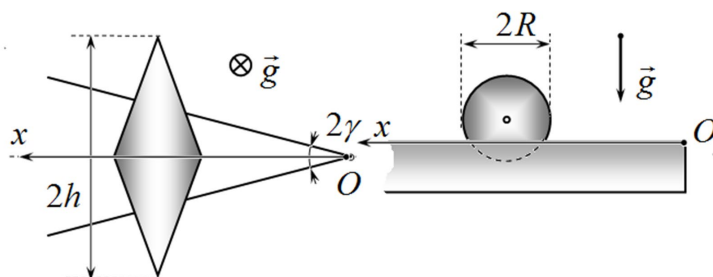
Place the papers inside the envelope and leave everything on your desk. You are not allowed to take any paper out of the room.

Problem 1 (10.0 points)

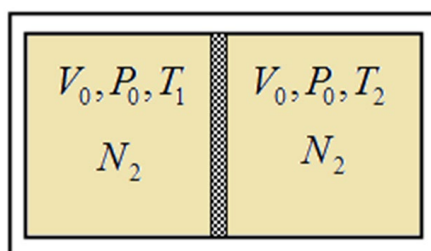
This problem consists of three independent parts.

Problem 1.1 (3.0 points)

On two identical horizontal V-shaped slats (see figure below), forming a dihedral angle of 2γ ($\tan \gamma = 0.100$), there is a solid bicone with a base diameter of $D = 2R = 8.00$ cm and a distance between the vertices of $2h = 20.0$ cm, representing two identical homogeneous cones, rigidly fastened by their bases. First, the bicone is held so that its center of mass is right above the vertex of the dihedral angle, symmetrically relative to its bisectoral plane. Then it is released and it begins to roll along the slats without slipping. Find the dependence of the bicone speed of translational motion of the $v(x)$ on the x coordinate measured horizontally from the vertex of the dihedral angle to the center of mass of the bicone. Calculate the speed of the bicone v_0 at $x_0 = 50.0$ cm. Determine the maximum angular velocity ω_{max} , that the bicone is to reach during its motion. Consider that the height of the slats exceeds the radius of the cone bases, and the acceleration of gravity is $g = 9.80$ m/c².

**Problem 1.2 (4.0 points)**

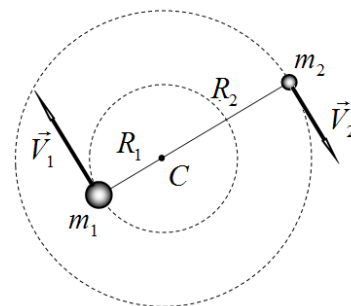
A thermally insulated vessel with a volume of $2V_0 = 2.00$ l is divided by a thin weightless movable heat-conducting partition into two equal parts, each containing nitrogen N_2 at a pressure $P_0 = 100$ kPa. The initial temperature of nitrogen in one half of the vessel is $T_1 = 240$ K, and it is $T_2 = 360$ K in the other. As a result of heat exchange, the partition begins to move slowly without friction. 1) Determine the amount of heat Q that will be exchanged between parts of the vessel by the time complete thermodynamic equilibrium is established; 2) Calculate the minimum work A' that must be done to return the partition to its original position. Neglect the heat capacities of the vessel and partition.

**Problem 1.3 (3.0 points)**

An electric motor connected to a battery lifts a load of mass m at a constant speed to a certain height h in time $t_1 = 1.00$ min. In this case, the load is tied to a thread that is wound on a uniformly rotating electric motor shaft. The time it takes to lift two loads with a total mass of $2m$ to the same height turns out to be $\Delta t = 7.00$ s longer. 1) Find the maximum number n_{max} of loads of the same mass m that such an electric motor can lift; 2) Calculate the time t_{max} that the electric motor is to require to uniformly lift the maximum number of loads n_{max} to the height h . Consider that the torque of an electric motor is proportional to the current flowing through its winding.

Problem 2. Lagrange points (10.0 points)**Two body problem**

Consider the two-body problem. Two massive bodies with masses m_1 , and $m_2 < m_1$ respectively, move only under the influence of the force of gravitational interaction in circular orbits around a common center of mass C . The distance between the bodies remains unchanged and equal to R_0 .



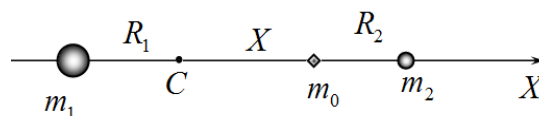
2.1 Find the radii R_1 and R_2 of the trajectories of the bodies. Express your answer through the quantities R_0, m_1, m_2 .

2.2 Find the angular velocity ω_0 of the bodies rotations. Express your answer through the quantities R_0, m_1, m_2 and the gravitational constant G .

Lagrange points in a three-body system

Lagrange points, libration points (Latin *librātiō* – swinging) or L-points are points in the space of a system of two massive bodies in which a third body with negligible mass, not affected by any other forces other than gravitational ones from the first two, can remain motionless relative to these bodies.

Consider adding a third body to the system described above, the mass of which m_0 is significantly less than the masses of the first two bodies, $m_0 \ll m_1, m_2$. Introduce the X axis along a straight line passing through the bodies m_1, m_2 , as shown in the figure. The origin is compatible with the center of mass C . To simplify mathematical transformations, use the following quantities:



- as a unit of length, use the distance R_0 between bodies m_1, m_2 ; the position of a small body is determined by the dimensionless coordinate $x = X/R_0$, which can vary from minus to plus infinity;

- as a unit of force use the quantity $F_0 = m_0 \omega_0^2 R_0$;

- introduce the dimensionless parameter $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

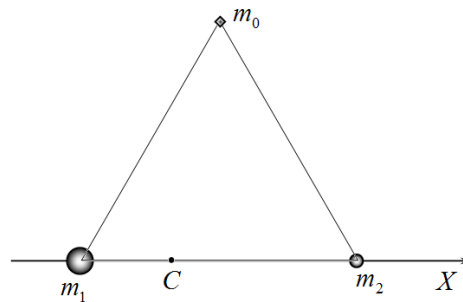
2.3 Obtain an exact equation for determining the x coordinates of Lagrange points lying on the X axis. In addition to the desired x coordinate, this equation should include only the parameter μ .

2.4 Draw a schematic graph of the projection onto the X axis of the force F_x acting on a small body from two massive bodies at $\mu = 0.20$. Express your answer in terms of relative units $f_x = F_x/F_0$ and $x = X/R_0$.

2.5 Determine the possible number of Lagrange points that exist on the X axis.

2.6 Calculate the numerical values of the coordinates of these points with an error not exceeding $\Delta x = 0.05$ if $\mu = 0.20$.

2.7 Prove that the point lying at the vertex of a regular triangle constructed on the segment m_1, m_2 is a Lagrange point.

**Lagrange points in the Solar System**

For calculations, use the following numerical values of astronomical quantities: solar mass $M_1 = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg; Earth mass $M_2 = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg; the Earth's orbit can be considered a circle with radius $R_0 = 1.50 \cdot 10^8$; Jupiter's orbital period around the Sun is 11.9 Earth years.

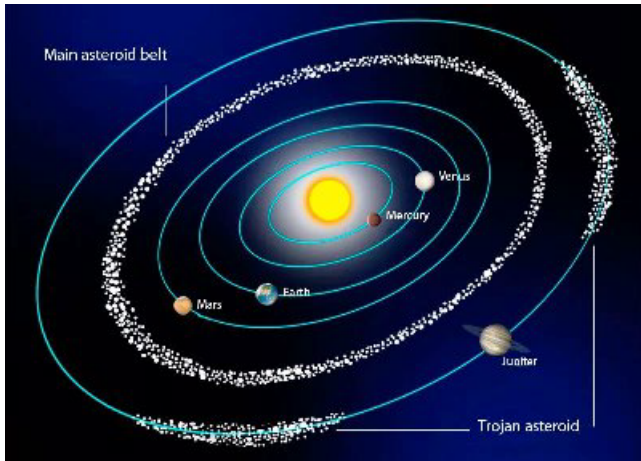
SOHO is a solar observing spacecraft, a joint project of ESA and NASA, which was launched on December 2, 1995 and began operations in May 1996. The device is located on the straight line connecting the Sun and the Earth, its position relative to the Earth remains practically unchanged over time.

2.8 Determine at what distance l_5 from the Earth the SOHO spacecraft is located. Express the formula in terms of the ratio of the masses of the Earth and the Sun and the radius of the Earth's orbit. Calculate the numerical value of this distance.

On December 25, 2021, a spacecraft equipped with the James Webb infrared telescope was successfully launched from the Kourou spaceport using an Ariane 5 rocket. In January 2022, this device

reached its permanent deployment point. The position of the telescope is to remain virtually unchanged relative to the Earth, and it is assumed to stay in the Earth shadow all the time.

2.9 Determine at what distance l_W from the Earth the James Webb telescope is located. Express your answer in terms of the Earth-to-Sun mass ratio and the radius of the Earth's orbit. Calculate the numerical value of this distance.



Small planets, called asteroids, are distributed extremely unevenly in the Solar System: in addition to the well-known asteroid belt, located between the orbits of Mars and Jupiter, there are two large groups of asteroids moving near the orbit of Jupiter. These groups of asteroids are called "Trojan" asteroids.

2.10 Calculate the distances l_J from Jupiter to the centers of groups of Trojan asteroids.

Problem 3. Geometric optics and photodetector (10.0 points)

In this problem, the laws of geometric optics are to be studied using a photodetector, which is a device for converting light energy into electrical energy. It is assumed that the absorbing surface of the photodetector is flat and when it is connected to a milliammeter, it shows a current value proportional to the power of the absorbed electromagnetic radiation.

Geometric optics is a branch of optics that studies the laws of light propagation in transparent media, the reflection of light from mirror-reflecting surfaces, and the principles of constructing images when light passes through optical systems without taking into account its wave properties. The basic concept of geometric optics is a light beam. This implies that the direction of the flow of radiant energy (path of the light beam) does not depend on the transverse dimensions of the light beam. Let us recall the laws of geometric optics necessary for this problem solution.

3.1 When reflected from a flat surface, the incident and reflected rays lie in the same plane with the normal at the point of incidence. Let the incident ray make an angle α with the normal, and the reflected ray make an angle β . Write down the relationship between these angles.

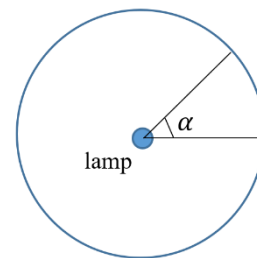
3.2 When light falls from air onto a flat surface of a material with refractive index n , the incident and refracted rays also lie in the same plane with the normal at the point of incidence. Let the incident ray make an angle α with the normal, and the refracted ray make an angle β . Write down the relationship between these angles.

In the following parts of this problem, we consider only situations in which, in the processes of light refraction, the above-mentioned angles are small and the approximation of paraxial optics holds.

3.3 Rewrite the answer to 3.2 in the case of small angles of incidence and refraction.

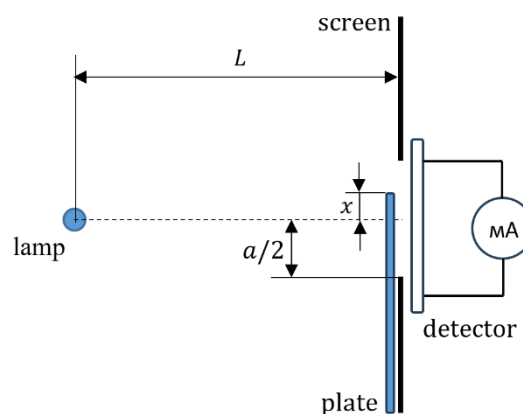
In this problem, the radiation source is assumed to be a very long, thin cylindrical lamp, the surface of which emits equally in all directions.

3.4 Let the radiation power of the lamp from its entire surface be W . Determine the radiation power W_α concentrated in a plane angle α as shown in the figure.



Thin plate

Let the light source described above illuminate an opaque screen in which a rectangular slit $a = 5.00$ cm wide is made. The lamp is located parallel to the edges of the slit directly opposite its center at a distance of $L = 100$ cm, and immediately behind the slit the surface of the photodetector is placed in such a way that it captures the entire luminous flux passing through the slit. The photodetector itself is connected to a milliammeter. A thin rectangular plate can move in parallel along the screen, the upper edge of which is parallel to the edges of the slit, while the material of the plate is translucent with a transmittance coefficient of $\tau = 0,500$. In the absence of the plate, the milliammeter shows the current value $I_0 = 10.0$ mA.



3.5 Let now x be the coordinate from the center of the slit to the edge of the plate with the axis vertically directed upward. Plot a graph of the deviation of the milliammeter readings $\Delta I(x)$ in milliamperes from the initial reading I_0 from the x coordinate in the range of -5.00 cm to 5.00 cm. Explicitly indicate the coordinates of all characteristic points on the graph.

Thick plate

Let us leave the observation scheme the same, but replace the thin plate with a thick plate of thickness d , while its horizontal surface is a perfectly reflective mirror on both sides, and the refractive index of the material is n . For this part, consider the numerical values of the parameters a, L, τ and I_0 unknown. For clarity, the layout diagram is shown in Figure 1, and Figure 2 shows the corresponding measurement results in the range of changes in the x coordinate from -3.00 cm to 0.00 cm and three

characteristic points x_1, x_2, x_3 of the graph are marked. Here $\Delta I(x)$ is the deviation of the milliammeter readings in milliamperes from the initial reading I_0 in the absence of the plate.

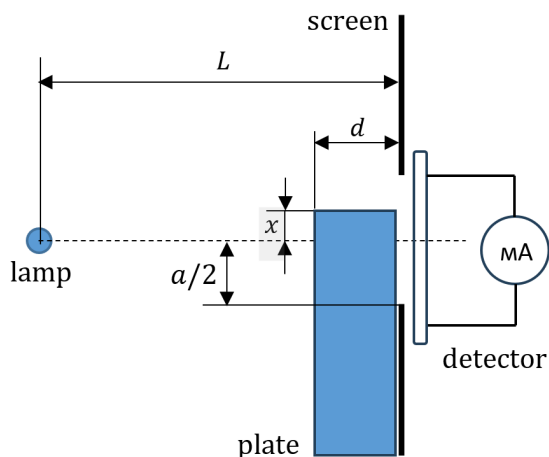


Figure 1. Scheme of measurements.

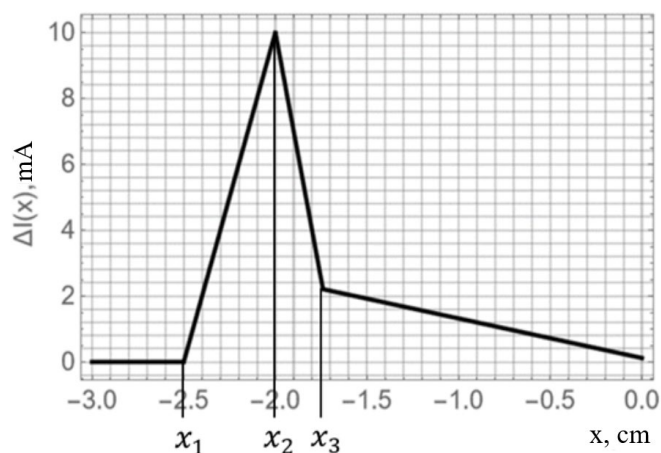


Figure 2. Measurement results.

3.6 Express the coordinate values of point x_1 in terms of the values a, L, d, n, τ .

3.7 Express the coordinate values of point x_2 in terms of the values a, L, d, n, τ .

3.8 Express the value of ΔI_{max} at point x_2 in terms of the quantities a, L, d, n, τ and I_0 .

3.9 Express the coordinate values of point x_3 in terms of the values a, L, d, n, τ .

3.10 Find the slope coefficient $d\Delta I(x)/dx$ of the straight line in the area to the right of point x_3 and express it through the quantities a, L, d, n, τ, I_0 .

3.11 Based on the graph and parameters obtained in 3.6-3.10, determine the numerical values of the parameters a, n, τ, I_0 , as well as the ratio L/d .

3.12 Based on the obtained numerical data, construct the right side of the graph as the x coordinate changes from 0.00 cm to 3.00 cm, indicating the coordinates of all characteristic points on the graph.

Mathematical hint for the theoretical competition

The following formulas may be useful:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ where } n \neq -1 \text{ is a fixed number, } C \text{ refers to an arbitrary constant;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ where } C \text{ stands for an arbitrary constant;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ for } |x| \ll 1 \text{ and any value of } \gamma;$$

$$\tan x \approx \sin x \approx x, \text{ for } |x| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ for } |x| \ll 1.$$

ТЕОРИЯЛЫҚ ТУР

2024 жылдың 9 ақпан

Алдымен мынаны оқып шығыңыз:

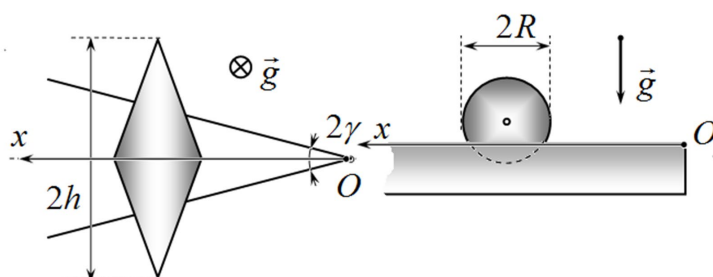
1. Теориялық тур үш тапсырмадан тұрады. Турдың ұзақтығы 4 сағат.
2. Есептеу үшін калькуляторды пайдалануға болады.
3. Сізге бос қағаз және таза **Жазу парақтары** беріледі. Бос қағаз парақтары **Өрескел** жазбаларға арналған; оларды өз қалауыңыз бойынша пайдалануға болады, олар тексерілмейді. Жұмысыңызды тексеру кезінде бағаланатын мәселелердің шешімдері таза **Жазу парақтарына** жазылуы керек. Шешімдеріңізде ауызша сипаттамаларды мүмкіндігінше аз пайдаланыңыз. Негізінде теңдеулерді, сандарды, әріптерді, суреттерді және графиктерді пайдалану керек.
4. **Жазу парақтарының** тек алдыңғы жағын пайдаланыңыз. Жазу кезінде белгіленген кадр шеңберінен шықпаңыз.
5. Әрбір мәселенің шешімін **Жазу парақтарының** жаңа бетінен бастау керек.
6. Әрбір пайдаланылған **Жазу парағында** бұл үшін берілген бағандарда еліңізді (**Еліңізді**), кодыңызды (**Студенттік кодты**), тапсырманың реттік нөмірін (**Сұрақ нөмірі**), әрбір парақтың ағымдағы нөмірін (**Бет нөмірі**) көрсетуіңіз керек және барлық есептерді шешу үшін пайдаланылатын парақтардың жалпы саны (**Беттер саны**). Жауабыңызға кейбір қолданылған **Жазу парақтарын** қосуды қаламасаңыз, оларды бүкіл парақ бойынша үлкен крестпен сызып тастаңыз және оларды жалпы парақтар санына қоспаңыз.

Есеп 1 (10.0 ұпай)

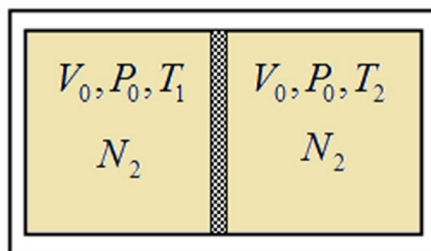
Бұл тапсырма бір-біріне байланысты емес үш бөліктен тұрады.

Тапсырма 1.1 (3.0 ұпай)

Горизонталь орналасқан, төбесіндегі бұрышы 2γ ($\tan \gamma = 0.100$) болатын V-формалы рельстің үстінде табанының диаметрі $D = 2R = 8.00$ см, ал төбелерінің ара қашықтығы $2h = 20.0$ см болатын биконус (табандарымен мықтап бекітілген екі конус) орналастырған. Бастапқыда биконус оның массалар центрі рельстің ұшына (O нүктесіне) сәйкес келетіндей, төбесіндегі бұрыш биссектрисасына симметриялы болатындай етіп орналастырылады. Содан кейін оны босатады, ол рельспен сырғанамай аналып қозғала бастайды. Биконустың ілгерілемелі қозғалысының $v(x)$ жылдамдығының горизонталь бағытта рельстің төбесінен бастап есептелген x координатынан тәуелділігін анықтаңыз. Бұл жылдамдықтың $x_0 = 50.0$ см болғандағы v_0 мәнін анықтаңыз. Биконустың қозғалысы кезінде ол жететін ең үлкен ω_{max} жылдамдықты анықтаңыз. Рельстің биіктігі конус табанының радиусынан артық деп есептеңіз, еркін түсу үдеуі $g = 9.80$ м/с².

**Тапсырма 1.2 (4.0 ұпай)**

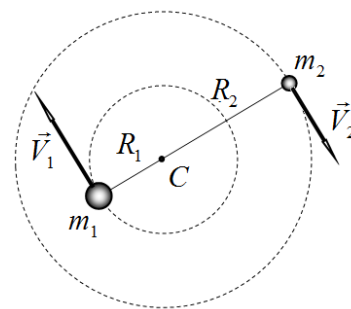
Ортамен жылу алмаспайтын, көлемі $2V_0 = 2.00$ л ыдыс жұқа, салмақсыз, жылжымалы, әрі жылу өткізетін қалқамен екі тең бөлікке бөлінген, олардың әрқайсысында қысымы $P_0 = 100$ кПа болатын N_2 азот бар. Ыдыстың бір бөлігіндегі азоттың бастапқы температурасы $T_1 = 240$ К, ал екіншісінікі – $T_2 = 360$ К. Жылу алмасу нәтижесінде қалқан үйкеліссіз баяу қозғала бастайды. 1) Толық термодинамикалық тепе-теңдік орнатылған кезде ыдыстың бөліктері алмасатын Q жылу мөлшерін анықтаңыз; 2) Бөліктерді бастапқы қалпына келтіру үшін жасалуы тиіс минималды A' жұмысын есептеңіз.

**Тапсырма 1.3 (3.0 ұпай)**

Аккумулятор батареясына қосылған электр қозғалтқышы (двигателі) массасы m жүкті қандай да бір h биіктікке тұрақты жылдамдықпен $t_1 = 1.00$ мин уақыт аралығында көтереді. Бұл жағдайда жүк электр қозғалтқышының біркелкі айналатын білігіне (валына) оралған жіпке байланған. Осындай биіктікке жалпы массасы $2m$ болатын, екі жүкті көтерілу уақыты $\Delta t = 7.00$ с-қа артық болды. 1) Осындай электр қозғалтқыш көтере алатын массалары бірдей m жүктердің n_{max} максималды санын табыңыз; 2) Осындай n_{max} жүктердің максималды санын h биіктікке біркелкі көтеру үшін электр қозғалтқышына қажет t_{max} уақытты есептеңіз. Электр қозғалтқышының айналдыру моменті оның орамасынан өтетін токқа пропорционалды деп есептеңіз.

Есеп 2. Лагранж нүктелері (10.0 ұпай)**Екі дене мәселесі.**

Екі дене мәселесін қарастырамыз. Бірінің массасы m_1 , ал екіншісінің массасы – $m_2 < m_1$ болатын екі салмақты дене тек гравитациялық күштің әсерінен олардың ортақ массалар C нүктесінің маңында дөңгелек орбиталар бойымен қозғалады. Денелер арасындағы қашықтық өзгеріссіз қалады және R_0 -ға тең.



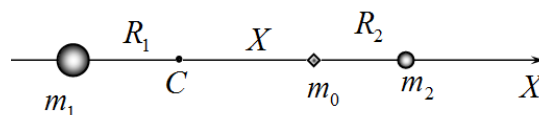
2.1 R_1 және R_2 траекторияларының радиустарын табыңыз. Жауапты R_0, m_1, m_2 шамалары арқылы өрнектеп жазыңыз.

2.2 Денелер қозғалысының бұрыштық жылдамдығы ω_0 -ді табыңыз. Жауапты R_0, m_1, m_2 шамалары және G гравитациялық тұрақтысы арқылы өрнектеп жазыңыз.

Үш дене жүйесіндегі Лагранж нүктелері.

Лагранж нүктелері, либрация нүктелері (лат. librātiō-тербеліс), немесе L – нүктелері деп екі массивті денелердің арасында орналасқан, массасы өте аз, алғашқы екі денемен тек гравитациялық күшпен әсерлесетін, орныны алғашқы екі денеге қатысты өзгеріссіз қалатын дене орналасқан нүктені айтады.

Жоғарыда қарастырылған жүйеге массасы алғашқы екі дененің массасынан едәуір аз m_0 массалы үшінші денені қосайық, $m_0 \ll m_1, m_2$. Суретте көрсетілгендей, m_1, m_2 , денелері арқылы өтетін, X осін енгізейік. Санақтың бас нүктесі массалар центрі болатын C нүктесімен сәйкес болсын. Математикалық түрлендірулерді жеңілдету үшін мынадай шамаларды пайдаланыңыз:



- ұзындық бірлігі ретінде m_1, m_2 денелері арасындағы R_0 қашықтықты пайдаланыңыз; кіші дененің орны өлшемсіз $x = X/R_0$ координатасымен анықталады, ол минус шексіздіктен пен плюс шексіздікке дейін өзгеруі мүмкін.

- күш бірлігі ретінде $F_0 = m_0 \omega_0^2 R_0$ шамасын қолданыңыз;

- мынадай өлшем бірліксіз параметр енгізіңіз $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

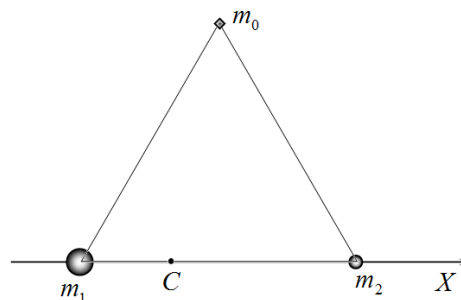
2.3 X осінде жатқан Лагранж нүктелерінің x координатын анықтайтын теңдеуді алыңыз, бұл теңдеуге іздестіріп отырған x координатасынан басқа тек μ параметрі ғана кіруі керек.

2.4 $\mu = 0.20$ болғанда екі массивті дене тарапынан кіші денеге әсер ететін F_x күшінің X осіне проекцияның схемалық графигін жасаңыз. Жауапты салыстырмалы $f_x = F_x/F_0$ және $x = X/R_0$ бірліктері арқылы өрнектеңіз.

2.5 X осінде болатын Лагранж нүктелерінің мүмкін санын анықтаңыз.

2.6 Осы нүктелердің координаттарының $\mu = 0.20$ болған кездегі сандық мәндерін, қателігі $\Delta x = 0.05$ -тен аспайтындай етіп есептеңіз.

2.7 m_1, m_2 кесіндісі негізінде тұрғызылған дұрыс үшбұрыштың жоғарғы ұшында орналасқан нүкте Лагранж нүктесі болатынын дәлелдеңіз.

**Күн жүйесіндегі Лагранж нүктелері.**

Есептеулер жасау үшін астрономиялық шамалардың төмендегі сандық мәндерін пайдаланыңыз: Күннің массасы $M_1 = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг; Жердің массасы $M_2 = 5.97 \cdot 10^{24}$ кг; Жер орбитасын радиусы $R_0 = 1.50 \cdot 10^8$ км шеңбер деп санауға болады; Юпитердің Күнді айналу периоды - 11.9 Жер жыл.

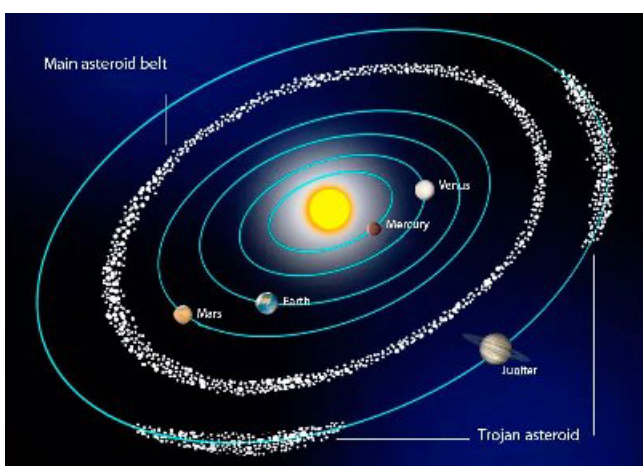
SOHO-күнді бақылайтын ғарыш кемесі, ол ЕКА мен НАСА-ның бірлескен жобасы, ол 1995 жылы 2 желтоқсанда орбитаға шығарылып, 1996 жылдың мамырында жұмысын бастады. Құрылғы

күн мен жердi байланыстыратын түзу сызықта орналасқан, оның Жерге қатысты орны уақыт өте келе өзгеріссіз қалады.

2.8 SOHO ғарыш кемесі Жерден қандай l_S қашықтықта орналасқанын анықтаңыз. Формуланы Жер мен Күн массаларының қатынасы және Жер орбитасының радиусы арқылы өрнектеңіз. Осы қашықтықтың сандық мәнін есептеңіз.

2021 жылғы 25 желтоқсанда Куру ғарыш айлағынан "Ариан-5" зымыранының көмегімен "Джеймс Уэбб" инфрақызыл телескопымен жабдықталған ғарыш аппараты сәтті ұшырылды. 2022 жылдың қаңтарында бұл құрылғы өзінің тұрақты орналасқан жеріне шықты. Телескоптың орналасуы Жерге қатысты іс жүзінде өзгеріссіз қалады және ол үнемі Жердің көлеңкесінде болады.

2.9 «Джеймс Уэбб» телескопы Жерден қандай l_W қашықтықта орналасқанын анықтаңыз. Формуланы Жер мен Күн массаларының қатынасы және Жер орбитасының радиусы арқылы өрнектеңіз. Осы қашықтықтың сандық мәнін есептеңіз.



Күн жүйесінде астероидтар деп аталатын шағын планеталардың таралуы өте біркелкі емес: Марс пен Юпитер орбиталарының арасында орналасқан белгілі астероид белдеуінен басқа, Юпитер орбитасына жақын жерде қозғалатын астероидтардың екі үлкен тобы бар. Бұл астероидтар топтары «троялық» деп аталады.

2.10 Юпитерден трояндық астероидтар топтарының орталықтарына дейінгі l_J қашықтықтарын есептеңіз.

Есеп 3. Геометриялық оптика және фотодетектор (10.0 ұпай)

Бұл есепте жарық энергиясын электр энергиясына түрлендіруге арналған құрылғы болып табылатын фотодетектордың көмегімен геометриялық оптика заңдары зерттелетін болады. Фотодетектордың жұту беті тегіс және ол миллиамперметрге қосылғанда жұтылған электромагниттік сәулеленудің қуатына пропорционал болатын ток мәнін көрсетеді деп есептелінеді.

Геометриялық оптика деп жарықтың толқын екенін ескермей, оның мөлдір ортада таралу заңдарын, айнадан шағылуын және ол оптикалық жүйелер арқылы өткендегі кескіндерін салу принциптерін зерттейтін оптиканың бөлімін айтады. Геометриялық оптиканың негізгі түсінігі – жарық сәулесі. Бұл жерде сәулелену энергиясының ағынының бағыты (жарық сәулесінің жолы) жарық сәулесінің көлденең өлшемдеріне тәуелді емес деп есептелінеді. Осы тапсырмаға қажетті геометриялық оптика заңдарын еске түсірейік.

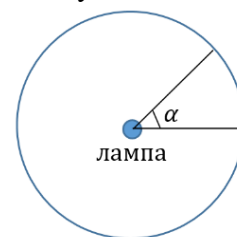
3.1 Сәуле жазықтықтан шағылған кезде түскен және шағылған сәулелер және түсу нүктесіне тұрғызылған нормаль бір жазықтықта жатады. Түскен сәуле нормальмен α бұрышын, ал шағылған сәуле β бұрышын жасасын. Осы бұрыштардың арасындағы байланысты жаз.

3.2 Жарық ауадан сыну көрсеткіші n болатын ортаның жазық бетіне түскен кезде түскен және сынған сәулелер де түсу нүктесіндегі нормальмен бір жазықтықта жатады. Түскен сәуле нормальмен α бұрышын, ал сынған сәуле – β бұрышын жасасын. Осы бұрыштардың арасындағы байланысты жаз.

Болашақта бұл мәселеде біз жарықтың сыну процестерінде жоғарыда аталған бұрыштар аз болатын және параксиалды оптиканың жуықтауын қолдануға болатын жағдайларды ғана қарастырамыз.

3.3 Түсу және сыну бұрыштары аз болған жағдайда жоғарыдағы 3.2-пункттің жауабын қайта жазыңыз.

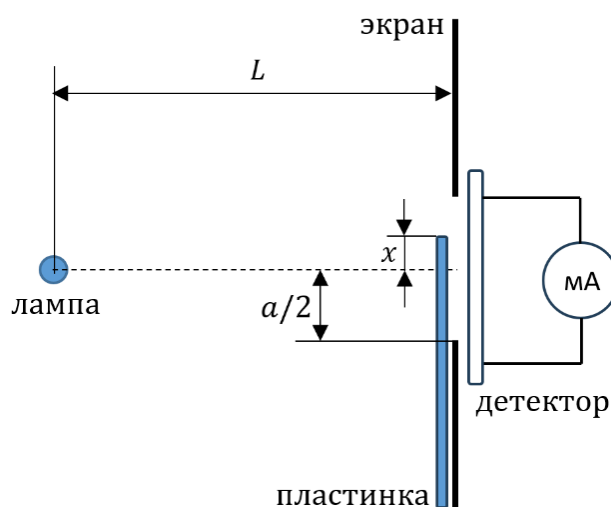
Бұл мәселеде сәуле шығару көзі ретінде өте ұзын, әрі жіңішке цилиндр формасындағы шам пайдаланылады, оның беті барлық бағытта бірдей сәуле шығарады.



3.4 Шамның бүкіл бетінен сәуле шығару қуаты W болсын. Суретте көрсетілгендей α жазық бұрышында шоғырланған W_α сәулелену қуатын анықтаңыз.

Жұқа пластинка

Жоғарыда сипатталған жарық көзі мөлдір емес экранды жарықтандырсын, онда ені $a = 5.00$ см тік бұрышты саңылау жасалған. Шам саңылаудың шеттеріне параллель және оның ортасынан тікелей $L = 100$ см қашықтықта болатындай етіп орналастырылған, ал саңылаудың артында фотодетектордың беті орналасқан, ол саңылау арқылы өтетін барлық жарық ағынын алады. Фотодетектордың өзі миллиамперметрге қосылған. Жіңішке төртбұрышты пластина экран бойымен параллель қозғала алады, оның жоғарғы шеті саңылау жиектеріне параллель, ал пластинаның материалы мөлдір жәе, өткізгіштік коэффициенті $\tau = 0,500$. Пластина саңылауды жаппай тұрған кезде миллиамперметр $I_0 = 10.0$ мА ток мәнін көрсетеді.

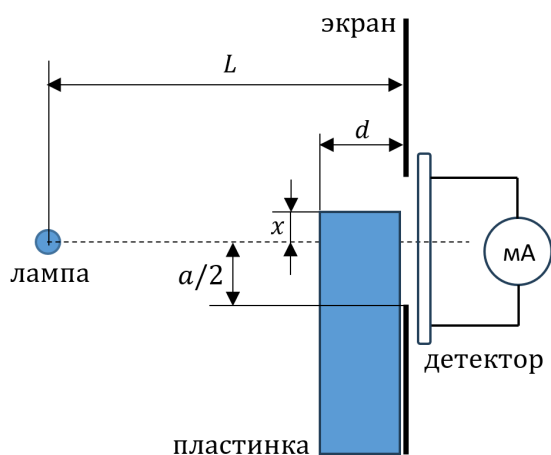


3.5 Енді x –вертикаль жоғары бағытталған ось бойынша саңылаудың ортасынан пластинаның шетіне дейінгі аралықты анықтайтын координата болсын. Бұдан әрі миллиамперметрдің көрсетуінің оның I_0 бастапқы мәнінен ауытқуын, $\Delta I(x)$ -ны анықтап, оның x координатынан тәуелділігінің графигін салыңыз. Бұл жерде координаттың өзгеруін -5.00 см-ден 5.00 см-ге

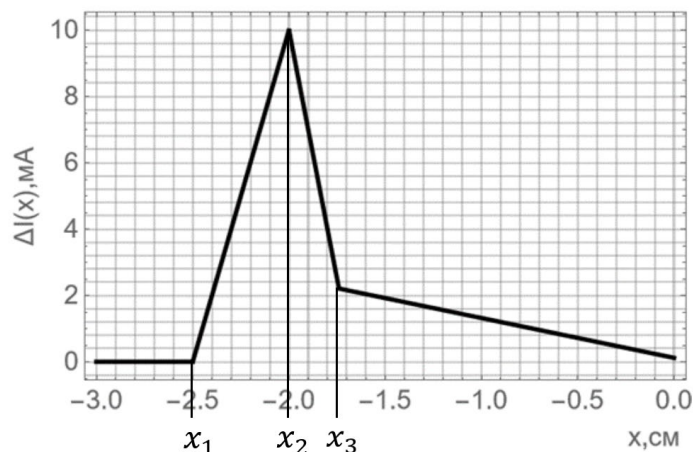
дейінгі аралықта қарастырыңыз. Графиктегі ерекше нүктелерінің координаттарын нақты көрсетіңіз.

Қалың пластинка

Бақылау сұлбасын сол қалпында қалдырайық, бірақ жұқа пластинаны қалыңдығы d қалың пластинамен алмастырамыз, ал оның көлденең беті екі жағынан да тамаша шағылыстыратын айна болсын, ал материалдың сыну көрсеткіші n . Бұл пункттегі a, L, τ және I_0 параметрлердің сандық мәндері белгісіз. Түсінікті болу үшін орналасу диаграммасы 1-суретте көрсетілген, ал 2-суретте x координатының $-3,00$ см-ден $0,00$ см-ге дейінгі аралықтағы өлшеу нәтижелері келтірілген. Мұндағы x_1, x_2, x_3 графиктің үш ерекше нүктелері. Ал $\Delta I(x)$ – миллиамперметр көрсеткіштерінің I_0 бастапқы көрсеткішінен (миллиамперметрде пластина болмаған кездегі) ауытқуы.



Сурет 1. Өлшеу схемасы.



Сурет 2. Өлшеу нәтижелері.

- 3.6** x_1 нүктесінің координатын a, L, d, n, τ шамалары арқылы өрнектеңіз.
- 3.7** x_2 нүктесінің координатын a, L, d, n, τ шамалары арқылы өрнектеңіз.
- 3.8** x_2 нүктесіндегі ΔI_{max} мәнін a, L, d, n, τ және I_0 шамалары арқылы өрнектеңіз.
- 3.9** x_3 нүктесінің координатын a, L, d, n, τ шамалары арқылы өрнектеңіз.
- 3.10** x_3 нүктесінің оң жағындағы түзудің $d\Delta I(x)/dx$ көлбеулік коэффициентін тауып, оны a, L, d, n, τ, I_0 шамалар арқылы өрнектеңіз.
- 3.11** Жоғарыдағы 3.6-3.10 пункттерінде алынған график пен параметрлер негізінде a, n, τ, I_0 параметрлерінің сандық мәндерін, сонымен қатар L/d қатынасын анықтаңыз.
- 3.12** Анықталған сандық мәліметтерге сүйене отырып, x координаты $0,00$ см-ден $3,00$ см-ге дейінгі аралықта өзгерген кезде графиктің барлық ерекше нүктелерінің координаттарын табыңыз және графиктің оң жағын тұрғызыңыз.

Теориялық турдың есептері үшін қажет болуы мүмкін математикалық өрнектер

Сізге келесі интегралдар туралы білім қажет болуы мүмкін:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ мұндағы } n \neq -1 - \text{тұрақты, } C - \text{тұрақты сан;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ мұндағы } C - \text{тұрақты сан;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ үшін } |x| \ll 1 \text{ және кез-келген } \gamma;$$

$$\tan x \approx \sin x \approx x, \text{ үшін } |x| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ үшін } |x| \ll 1.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 января 2024 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

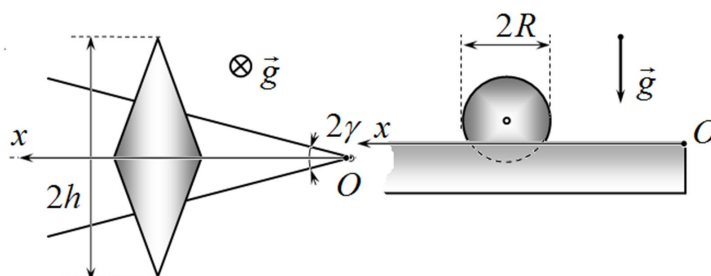
1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор.
3. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
4. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
5. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
6. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.

Задача 1 (10.0 балла)

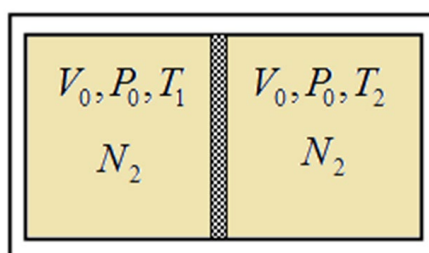
Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1.1 (3.0 балла)

На двух одинаковых горизонтальных V-образных рейках (см. рисунок ниже), образующих двугранный угол 2γ ($\tan \gamma = 0.100$), находится сплошной биконус с диаметром основания $D = 2R = 8.00$ см и расстоянием между вершинами $2h = 20.0$ см, представляющий собой два идентичных однородных конуса, жестко скрепленных своими основаниями. Вначале биконус удерживают так, что его центр масс находится над вершиной двугранного угла симметрично относительно его биссекториальной плоскости. Затем его отпускают, и он начинает катиться по рейкам без проскальзывания. Найдите зависимость скорости поступательного движения биконуса $v(x)$ от координаты x , отсчитываемой по горизонтали от вершины двугранного угла до центра масс биконуса. Рассчитайте величину скорости биконуса v_0 при $x_0 = 50.0$ см. Определите максимальную угловую скорость ω_{max} , которую достигнет биконус в процессе движения. Считайте, что высота реек превышает радиус основания конуса, а ускорение свободного падения равно $g = 9.80$ м/с².

**Задача 1.2 (4.0 балла)**

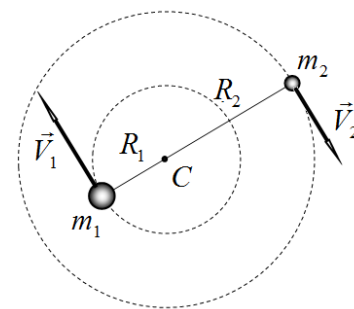
Теплоизолированный сосуд объёмом $2V_0 = 2.00$ л разделён тонкой невесомой подвижной теплопроводящей перегородкой на две равные части, в каждой из которых находится азот N_2 при давлении $P_0 = 100$ кПа. Начальная температура азота в одной из половин сосуда равна $T_1 = 240$ К, а в другой – $T_2 = 360$ К. В результате теплообмена перегородка начинает медленно перемещаться без трения. 1) Определите количество теплоты Q , которым обмениваются части сосуда к моменту установления полного термодинамического равновесия; 2) Рассчитайте минимальную работу A' , которую необходимо совершить, чтобы вернуть перегородку в исходное положение. Теплоёмкостями сосуда и перегородки пренебречь.

**Задача 1.3 (3.0 балла)**

Электродвигатель, подключенный к аккумуляторной батарее, поднимает с постоянной скоростью груз массы m на некоторую высоту h за время $t_1 = 1.00$ мин. При этом груз привязывается к нити, наматывающейся на равномерно вращающийся вал электродвигателя. Время подъёма двух грузов суммарной массы $2m$ на ту же высоту оказалось на $\Delta t = 7.00$ с больше. 1) Найдите максимальное количество n_{max} грузов одинаковой массы m , которые способен поднять такой электродвигатель; 2) Рассчитайте время t_{max} , которое потребуется электродвигателю для равномерного подъёма максимального количества грузов n_{max} на высоту h . Считайте, что крутящий момент электродвигателя пропорционален току, протекающему по его обмотке.

Задача 2. Точки Лагранжа (10.0 балла)**Задача двух тел.**

Рассмотрим задачу двух тел. Два массивных тела, масса одного из них которых равна m_1 , а второго – $m_2 < m_1$, движутся только под действием силы гравитационного взаимодействия по круговым орбитам вокруг общего центра масс C . Расстояние между телами остается неизменным и равным R_0 .



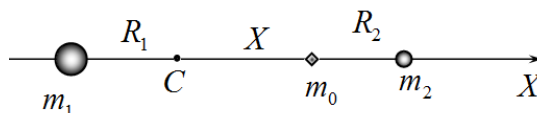
2.1 Найдите радиусы траекторий тел R_1 и R_2 . Ответ выразите через величины R_0, m_1, m_2 .

2.2 Найдите угловую скорость движения тел ω_0 . Ответ выразите через величины R_0, m_1, m_2 и гравитационную постоянную G .

Точки Лагранжа в системе трех тел.

Точки Лагранжа, точки либрации (лат. librātiō – раскачивание) или L-точки – точки в пространстве системы двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействия никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых, может оставаться неподвижным относительно этих тел.

Добавим в рассмотренную выше систему третье тело, масса которого m_0 значительно меньше масс первых двух тел, $m_0 \ll m_1, m_2$. Введем ось X , вдоль прямой, проходящей через тела m_1, m_2 , как показано на рисунке. Начало отсчета совместим с центром масс C . Для упрощения математических преобразований используйте следующие величины:



- в качестве единицы длины используйте расстояние R_0 между телами m_1, m_2 ; положение малого тела определяется безразмерной координатой $x = X/R_0$, которая может изменяться от минус до плюс бесконечности.

- в качестве единицы силы используйте величину $F_0 = m_0 \omega_0^2 R_0$;

- введем безразмерный параметр $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

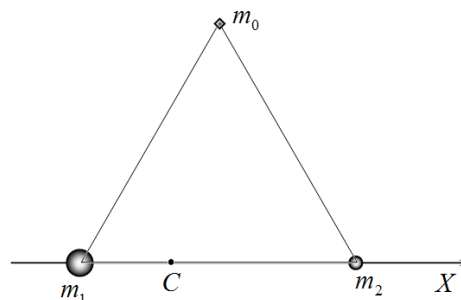
2.3 Получите точное уравнение для определения координат x точек Лагранжа, лежащих на оси X . В это уравнение, помимо искомой координаты x , должен входить только параметр μ .

2.4 Постройте схематический график зависимости проекции на ось X силы F_x , действующей на малое тело со стороны двух массивных тел при $\mu = 0.20$. Ответ выразите через относительные единицы $f_x = F_x/F_0$ и $x = X/R_0$.

2.5 Определите возможное число точек Лагранжа, которые существуют на оси X .

2.6 Рассчитайте численные значения координат этих точек с погрешностью, не превышающей $\Delta x = 0.05$, если $\mu = 0.20$.

2.7 Докажите, что точка, лежащая в вершине правильного треугольника, построенного на отрезке m_1, m_2 , является точкой Лагранжа.

**Точки Лагранжа в Солнечной системе.**

Для расчетов используйте следующие численные значения астрономических величин: масса Солнца $M_1 = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг; масса Земли $M_2 = 5.97 \cdot 10^{24}$ кг; орбиту Земли можно считать окружностью с радиусом $R_0 = 1.50 \cdot 10^8$ км; период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет 11.9 земных года.

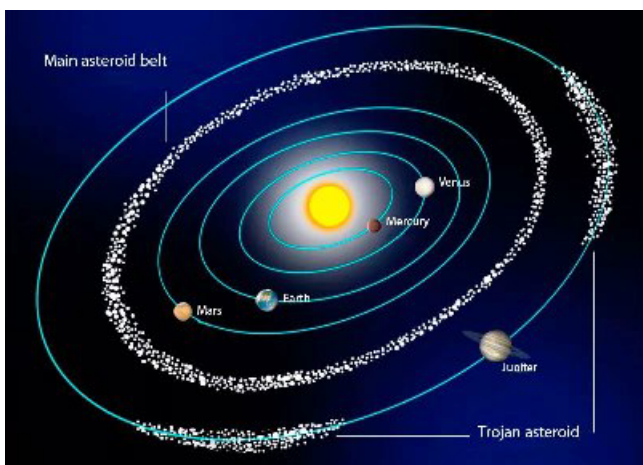
SOHO – космический аппарат для наблюдения за Солнцем, совместный проект ЕКА и НАСА, который был запущен 2 декабря 1995 года и приступил к работе в мае 1996 года. Аппарат находится

на прямой, соединяющей Солнце и Землю, его положение относительно Земли остается практически неизменным с течением времени.

2.8 Определите, на каком расстоянии l_S от Земли находится аппарат SOHO. Формулу выразите через отношение масс Земли и Солнца и радиус земной орбиты, Рассчитайте численное значение этого расстояния.

25 декабря 2021 года с космодрома Куру при помощи ракеты «Ариан-5» был успешно запущен космический аппарат, снабженный инфракрасным телескопом «Джеймс Уэбб». В январе 2022 года этот аппарат вышел в точку своей постоянной дислокации. Положение телескопа будет оставаться практически неизменным относительно Земли, причем все время он будет находиться в тени Земли.

2.9 Определите, на каком расстоянии l_W от Земли находится телескоп «Джеймс Уэбб». Формулу выразите через отношение масс Земли и Солнца и радиус земной орбиты, Рассчитайте численное значение этого расстояния.



Малые планеты, называемые астероидами, распределены в Солнечной системе крайне неравномерно: помимо известного пояса астероидов, расположенного между орбитами Марса и Юпитера, имеются две большие группы астероидов, движущиеся вблизи орбиты Юпитера. Эти группы астероидов называют «троянскими».

2.10 Рассчитайте расстояния l_J от Юпитера до центров групп троянских астероидов.

Задача 3. Геометрическая оптика и фотодетектор (10.0 баллов)

В данной задаче будут исследованы законы геометрической оптики с помощью фотодетектора, который представляет собой прибор для преобразования световой энергии в электрическую. Будем считать, что поглощающая поверхность фотодетектора является плоской и при его подключении к миллиамперметру он показывает величину тока, пропорциональную мощности поглощаемого электромагнитного излучения.

Геометрическая оптика – раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах, отражения света от зеркально-отражающих поверхностей и принципы построения изображений при прохождении света в оптических системах без учёта его волновых свойств. Основное понятие геометрической оптики – это световой луч. При этом подразумевается, что направление потока лучистой энергии (ход светового луча) не зависит от поперечных размеров пучка света. Вспомним необходимые для данной задачи законы геометрической оптики.

3.1 При отражении от плоской поверхности падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью в точке падения. Пусть падающий луч составляет с нормалью угол α , а отраженный луч – угол β . Запишите соотношение между этими углами.

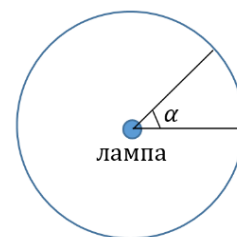
3.2 При падении света из воздуха на плоскую поверхность материала с показателем преломления n падающий и преломленный лучи также лежат в одной плоскости с нормалью в точке падения. Пусть падающий луч составляет с нормалью угол α , а преломленный луч – угол β . Запишите соотношение между этими углами.

В дальнейшем в данной задаче мы будем рассматривать только ситуации, в которых в процессах преломления света вышеупомянутые углы малы и можно пользоваться приближением параксиальной оптики.

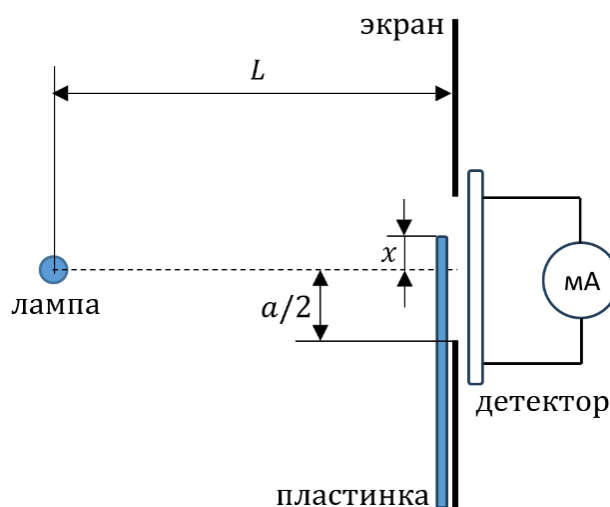
3.3 Перепишите ответ к пункту 3.2 в случае малых углов падения и преломления.

В данной задаче в качестве источника излучения будет использоваться очень длинная тонкая цилиндрическая лампа, поверхность которой излучает одинаково по всем направлениям.

3.4 Пусть мощность излучения лампы со всей ее поверхности составляет W . Определите мощность излучения W_α , сконцентрированную в плоском угле α как показано на рисунке.

**Тонкая пластинка**

Пусть описанный выше источник света освещает непрозрачный экран, в котором проделана прямоугольная щель шириной $a = 5.00$ см. Лампа располагается параллельно краям щели прямо напротив ее центра на расстоянии $L = 100$ см, а сразу за щелью располагается поверхность фотодетектора таким образом, что она улавливает весь световой поток, прошедший через щель. Сам фотодетектор подключен к миллиамперметру. Вдоль экрана может параллельно перемещаться тонкая прямоугольная пластинка, верхний край которой параллелен краям щели, при этом материал пластинки является полупрозрачным с коэффициентом пропускания $\tau = 0,500$. В отсутствие пластинки миллиамперметр показывает значение тока $I_0 = 10.0$ мА.



3.5 Пусть теперь x – координата от центра щели до края пластинки с вертикально направленной вверх осью. Постройте график зависимости отклонения показаний миллиамперметра $\Delta I(x)$ в миллиамперметрах от начального показания I_0 от координаты x в интервале от -5.00 см до 5.00 см. Явно укажите координаты всех характерных точек графика.

Толстая пластинка

Оставим схему наблюдения прежней, но заменим тонкую пластинку на толстую пластинку толщиной d , при этом его горизонтальная поверхность является идеально отражающим зеркалом с обеих сторон, а коэффициент преломления материала составляет n . Для данной части считайте числовые значения параметров a, L, τ и I_0 неизвестными. Для наглядности схема расположения показана на рисунке 1, а на рисунке 2 показаны соответствующие результаты измерений в диапазоне изменения координаты x от -3.00 см до 0.00 см и отмечены три характерные точки графика x_1, x_2, x_3 . Здесь $\Delta I(x)$ – отклонения показаний миллиамперметра в миллиамперметрах от начального показания I_0 в отсутствии пластинки.

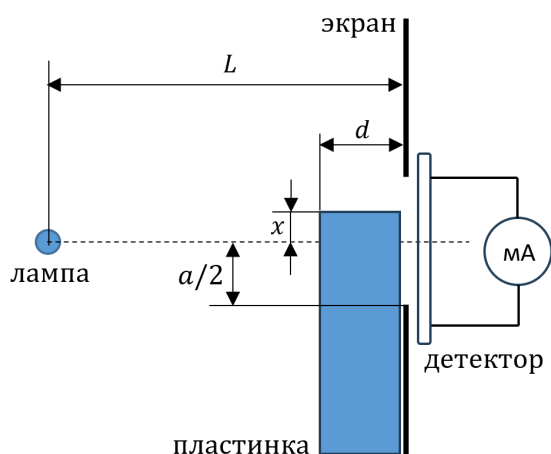


Рисунок 1. Схема проведения измерений.

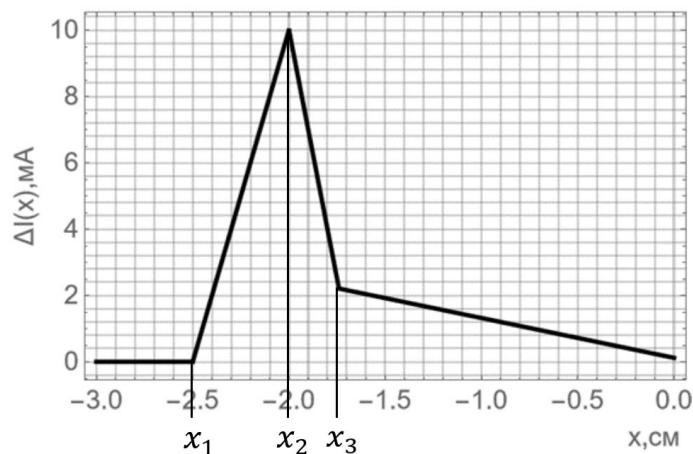


Рисунок 2. Результаты измерений.

3.6 Выразите значения координаты точки x_1 через величины a, L, d, n, τ .

3.7 Выразите значения координаты точки x_2 через величины a, L, d, n, τ .

3.8 Выразите значение ΔI_{max} в точке x_2 через величины a, L, d, n, τ и I_0 .

3.9 Выразите значения координаты точки x_3 через величины a, L, d, n, τ .

3.10 Найдите коэффициент наклона прямой $d\Delta I(x)/dx$ на участке правее точки x_3 и выразите его через величины a, L, d, n, τ, I_0 .

3.11 Исходя из графика и параметров, полученных в 3.6-3.10, определите численные значения параметров a, n, τ, I_0 , а также отношение L/d .

3.12 Исходя из полученных числовых данных, постройте правую часть графика при изменении координаты x от 0.00 см до 3.00 см, указав координаты всех характерных точек на графике.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1 \text{ – константа, } C \text{ – произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ где } C \text{ – произвольная постоянная;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ для } |x| \ll 1 \text{ и любых } \gamma;$$

$$\tan x \approx \sin x \approx x, \text{ для } |x| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ для } |x| \ll 1.$$