4-есеп

Мұғалім оқушыларға 10 әртүрлі оң сан берді. Сергей екі саннан тұратын барлық 45 жұпты алып, әр жұптағы сандардың қосындысын есептеді. Сонда олардың ішінде өзара тең бес қосынды табылған. Петя екі саннан тұратын барлық 45 жұпты алып, әр жұптағы сандардың көбейтіндісін есептеді. Петя алған көбейтінділердің ішінде ең көп дегенде нешеуі өзара тең болуы мүмкін?

Жауабы. 4.

Шешуі. Бес жұптағы сандардың қосындысы $2s$-ке тең болсын. $2s$-ке қосындыда бір сан екі рет кездесе алмайтыны айқын, өйткені кері жағдайда сол жұптардағы екінші сандар да тең болу керек, ал ол мүмкін емес. Сондықтан бес қосындыда берілген 10 санның әрқайсысы бір бірден кездеседі. Демек, әр жұптағы екі санның біреуі s-тен кіші, екіншісі s-тен үлкен болуы керек. s-тен кіші сандарды өсу ретімен тізіп жазайық: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Олардың жұптары үшін де $2s = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$ қосындысын жазсақ, барлық 10 санды реттеп шыға аламыз: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 <$ $< a_{10}$.

Енді, егер екі саннан құралған жұптағы сандардың көбейтіндісі t^2-қа тең болатын 5 көбейтінді табылсын. Онда, жоғарыдағыдай, осы 5 жұптағы 10 санның арасында әр сан дәл бір реттен кездеседі. Егер олардың ішінде t-дан кіші сандар $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ сандары болса, ал қалғандары үшін $t^2 = b_1b_{10} = b_2b_9 = b_3b_8 =$ $= b_4b_7 = b_5b_6$, болса, онда $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}$ сандары барлық 10 берілген сандар, өсу ретімен тізіліп жазылған сандар болады. Бірақ бұл жағдайда барлық i үшін $a_i = b_i$ теңдігі орындалады да, осыдан $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ және $a_1a_{10} = a_2a_9$ екені шығады. Осыдан $a_1 = a_2$ және $a_9 = a_{10}$ екені шығады, ал ол есеп шартына қайшылық. Демек, Петя алған көбейтінділердің ішінде ең өзара тең көбейтінділер саны 4-тен артық емес.

Петя алған көбейтінділердің ішінде бірдей 4 көбейтіні табылатындай мысал келтірейік. $1 \le k \le 5$ үшін $x_1 = 0{,}9$ және $x_{2k} = 2 - x_{2k-1}$ болсын, ал $1 \le k \le 4$ болғанда $x_{2k+1} = \frac{1}{2k}$ болсын. Осыған қоса $x_1 + x_2 = x_3 +$ $+ x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} = 2$ және $x_2x_3 = x_4x_5 = x_6x_7 = x_8x_9 = 1$ теңдіктері орындалады. $0 < x < 1$ болғанда $x < \frac{1}{2-x} < 1$ екені айқын, сондықтан $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9 < 1 < x_{10} < x_8 < x_6 < x_4 < x_2$, демек осылай құрастырылған барлық 10 сан әртүрлі болады.

Бағалау схемасы

Өзара тең бес қосындыда әр сан бір-бірден келетіні көрсетілсе: .... 0 ұпай
Бірдей көбейтінділер саны 4-тен артық емес екендігі көрсетілсе: .... 3 ұпай
4 бірдей көбейтінді үшін мысал келтірсе: .... 3 ұпай
Толық шешім: .... 7 ұпай
Мысал келтіргенде сандар әртүрлі екені дәлелденбесе: .... -1 ұпай

5-есеп

$m \times n$ кестесі берілген, мұнда mn саны 6-ға бөлінеді. Бұл кестеде кез келген 1×3 немесе 3×1 өлшемді тіктөртбұрышты *жолақ* деп, ал кез келген 1×2 немесе 2×1 өлшемді тіктөртбұрышты *домино* деп атайық. Кестені жолақтармен төсеп шыққан. Әр жолақтың екі ұяшығы бір доминомен, ал үшінші ұяшығы екінші доминоның бір ұяшығымен жабылатындай етіп, осы төсеудің үстінен тақтаны тағы да доминолармен төсеп шығуға болатынын дәлелдеңіз. (Төсеу кезінде тіктөртбұрыштар кестені толығымен жабады, ал бір бірін жаппайды.)

Шешуі. Жалпылықты сақтай отырып, m саны жұп сан деп есептейік. Екі жағдай қарастырайық.

1-жағдай: n — жұп сан. Бастапқы кестені өлшемдері 2×2 болатын шаршыларға бөлейік. Онда әр жолақта қандай да екі көрші ұяшық бір шаршыда жатады. Осы екі ұяшықты доминомен жабайық. Енді әр шаршыда келесі үш мүмкіндіктің біреуі орындалған: 1) оның барлық ұяшықтары доминомен жабылған; 2) екі көрші ұяшықтар доминомен жабылған, ал қалған екі ұяшық жабылмаған. Оларды жаңа доминомен жабайық; 3) шаршыдағы төрт ұяшықтың ешқайсысы доминомен жабылмаған. Олардың барлығын екі жаға доминомен жабамыз.

Осылай жасалынған төсеу есеп шартын қанағаттандыратынын байқау ғана қалды.

2-жағдай: n — тақ сан. Бұл жағдайда $m\times(n-1)$ тіктөртбұрышын 2×2 шаршыларына бөлейік те, ал қалған бөлігін, яғни $m \times 1$ тіктөртбұрышын 2×1 доминоларына бөлейік. Дәл жоғарыдағыдай, әр жолақта қандай да екі көрші ұяшық немесе 2×2 өлшемді шаршыда, немесе 2×1 тіктөртбұрышында жатыр. Сондықтан біз 1-жағдайдағыдай бізге керек төсеуді жасай аламыз.

Бағалау схемасы

m немесе n сандарын нақты санға теңестіріп шешілген есеп: .... 0 ұпай

Төсеуді адымдап бастап, соңында керек нәтиже алмаса: .... 0 ұпай

Төбелері жолақтар болатын, әрі есеп шарты орындалатындай екі жолақты қосатын үш доминоны жаба алатындай, граф енгізіп оны қарастырған кезде: .... 0 ұпай

Жоғарыдағы қарастырылған граф екі жарнақты екенін дәлелдесе: .... 0 ұпай

Есепті m немесе n санын жұп деп алып шешсе: .... 4 ұпай

6-есеп

ABC үшбұрышының медианалары G нүктесінде қиылысады. Алты GAB, GAC, GBA, GBC, GCA, GCB бұрыштарының ішінде кемінде үшеуінің әрқайсысы α-дан кем емес. α-ның қандай ең үлкен мәнінде осындай жағдай орындала алады?

Жауабы. $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Шешуі. $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ деп белгілейік.

Алдымен берілген жауапты қанағаттандыратын үшбұрышқа мысал келтірейік. $\angle C = 90°$, $AC = 2$ и $BC = \sqrt{2}$ болатын тікбұрышты ABC үшбұрышын қарастырайық. Онда $\angle BAC = \alpha_0$. M және N нүктелері, сәйкесінше, AB және AC қабырғаларының орталары болсын. $\triangle NCB \sim \triangle BCA$, өйткені $\angle NBC = \alpha_0$. MAC үшбұрышы теңбүйірлі, сондықтан $\angle MCA = \angle MAC = \alpha_0$. Соңында, $\angle MCB = 90° - \angle MCA = 90° - \alpha_0 > \alpha_0$. Сонда GBC, GCA және GCB бұрыштары α_0-дан кем емес.

Енді кез келген үшбұрышта қарастырылып жатқан алты бұрыштың ең көп дегенде екеуі α_0-ден үлкен бола алатынын дәлелдейік. GAB, GBC және GCA бұрыштарының ең көп дегенде біреуі ғана α_0-ден үлкен екенін дәлелдейік, ал қалған үш бұрыш үшін дәл осылай тұжырымдар орындалады.

Кері жориық, яғни $\angle GAB$ және $\angle GBC$ бұрыштары α_0-ден үлкен болсын. Онда олардың әрқайсысы $180° - \alpha_0$-ден кіші, өйткені олардың қосындысы $180°$-тан кіші. Сондықтан осы екі бұрыштың әрқайсысының синусы $\sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$-тен үлкен.

K нүктесі BC-ның ортасы болсын. Онда $KA = 3KG$. Басқа жағынан, синустар теоремасы бойынша,

$$\frac{KA}{KB} = \frac{\sin \angle KBA}{\sin \angle KAB} < \frac{1}{\sin \alpha_0}, \quad \text{дәл осылай} \quad \frac{KB}{KG} = \frac{\sin \angle KGB}{\sin \angle KBG} < \frac{1}{\sin \alpha_0}.$$

Осыдан

$$3 = \frac{KA}{KG} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KB}{KG} < \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} = 3.$$

Соңғы теңдіктер қайшылық береді.

Бағалау схемасы

1. Тек жауап қана келтірілсе .... 0 ұпай.
2. Жауаппен қоса есеп шартын қанағаттандыратын үшбұрыш мысалы келтірілсе (дәлелдеуімен): 2 ұпай.
3. α-ның ең үлкен мәні $30°$-тан үлкен екені дәлелденсе .... 0 ұпай.

Задача 4

Учитель выдал детям 10 различных положительных чисел. Серёжа вычислил все 45 их попарных сумм; среди них нашлось пять равных чисел. Петя вычислил все 45 их попарных произведений. Какое наибольшее количество из них могли оказаться равными?

Ответ. 4.

Решение. Пусть среди попарных сумм встречается пять раз число $2s$. Очевидно, одно и то же число не может встречаться в двух суммах, равных $2s$ (вторые слагаемые тогда тоже должны были бы совпадать). Поэтому в пяти суммах, равных $2s$, встречаются по одному разу все 10 чисел. В каждой из них одно слагаемое меньше s, а другое больше. Упорядочим слагаемые, меньшие s, по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Записывая $2s = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, получаем упорядочение всех десяти исходных чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}$.

Если и некоторое произведение t^2 встречается среди попарных произведений пять раз, то аналогичным образом каждое из десяти чисел встречается ровно в одном из пяти произведений, равных t^2. Если числа, меньшие t, в этих произведениях суть $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ и $t^2 = b_1b_{10} = b_2b_9 = b_3b_8 = b_4b_7 = b_5b_6$, то $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}$ – также упорядочение исходных чисел. Но тогда $a_i = b_i$ при всех i, то есть $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ и $a_1a_{10} = a_2a_9$. Отсюда следует, что $a_1 = a_2$ и $a_9 = a_{10}$, противоречие.

Пример, в котором равны четыре произведения, строится, например, так. Положим $x_1 = 0,9$, $x_{2k} = 2 - x_{2k-1}$ при $1 \leq k \leq 5$ и $x_{2k+1} = \frac{1}{2k}$ при $1 \leq k \leq 4$. При этом $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} = 2$ и $x_2x_3 = x_4x_5 = x_6x_7 = x_8x_9 = 1$. Поскольку, очевидно, $x < \frac{1}{2-x} < 1$ при $0 < x < 1$, имеем $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9 < 1 < x_{10} < x_8 < x_6 < x_4 < x_2$, то есть все построенные 10 чисел действительно различны.

Схема оценивания

Доказательство того, что в 5 равных суммах встречаются все числа по одному разу: .... 0 баллов
Доказательство того, что равных произведений не более 4: .... 3 балла
Пример 4 равных произведений: .... 3 балла
Полное решение: .... 7 баллов
В примере не доказано, что числа различны: .... −1 балл

Задача 5

Дана таблица $m \times n$, где mn делится на 6. В этой таблице *полоской* назовём любой прямоугольник 1×3 или 3×1, а *доминошкой* – любой прямоугольник 1×2 или 2×1. Таблицу замостили полосками. Докажите, что поверх этого замощения таблицу можно замостить доминошками так, что в каждой полоске две клетки будут накрыты одной доминошкой и ещё одна – другой. (При замощении прямоугольники покрывают всю таблицу и не перекрываются между собой.)

Решение. Не ограничивая общности, предположим, что число m чётное. Рассмотрим отдельно два случая, в зависимости от чётности числа n.

Случай 1: n чётно. Разобьём таблицу на квадратики 2×2. Заметим, что в каждой полоске некоторые две соседние клетки лежат в одном квадратике, покроем эти клетки доминошкой. Теперь для каждого квадратика выполнена одна из трёх возможностей: 1) все его клетки покрыты доминошками; 2) пара соседних клеток покрыта доминошкой, а две другие клетки не покрыты – покроем их новой доминошкой; 3) все четыре клетки не покрыты – покроем их двумя новыми доминошками. Нетрудно видеть, что полученное замощение удовлетворяет условию задачи.

Случай 2: n нечётно. Разобьем прямоугольник $m \times (n-1)$ на квадратики 2×2, а оставшийся столбец $m \times 1$ – на прямоугольники 2×1. Снова, в каждой полоске некоторые две соседние клетки лежат в одном квадратике 2×2 или прямоугольнике 2×1, поэтому мы сможем получить требуемое замощение аналогично первому случаю.

Схема оценивания

Рассмотрение случев, в которых m или n принимает конечное число значений: .... 0 баллов

Попытки пошагового построения требуемого замощения, которые не привели к полному решению: ... 0 баллов

Введение в рассмотрение графа с вершинами–полосками и рёбрами, соединяющими пары полосок, которые можно замостить тремя доминошками с соблюдением условия: .... 0 баллов

Доказательство того, что граф, описанный выше, является двудольным : .... 0 баллов

Решение задачи в предположении, что m и n чётные: .... 4 балла

Задача 6

Медианы треугольника ABC пересекаются в точке G. Среди шести углов GAB, GAC, GBA, GBC, GCA, GCB есть не менее трёх, каждый из которых не меньше α. При каком наибольшем α это могло произойти?

Ответ. $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Обозначим $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Для начала предъявим треугольник, в котором три из рассмотренных углов не меньше α_0. Это будет прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 2$ и $BC = \sqrt{2}$. Тогда $\angle BAC = \alpha_0$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Прямоугольные треугольники NCB и BCA подобны, так что $\angle NBC = \alpha_0$. Треугольник MAC — равнобедренный, поэтому $\angle MCA = \angle MAC = \alpha_0$. Наконец, $\angle MCB = 90° - \angle MCA = 90° - \alpha_0 > \alpha_0$. Итак, каждый из углов GBC, GCA и GCB не меньше α_0.

Осталось доказать, что в произвольном треугольнике ABC максимум два из рассматриваемых шести углов могут оказаться строго больше α_0. Мы докажем, что максимум один из углов GAB, GBC и GCA может превышать α_0; для остальных трёх углов рассуждение аналогично.

Предполагая противное, можно считать, что углы $\angle GAB$ и $\angle GBC$ строго больше α_0. Тогда каждый из них меньше, чем $180° - \alpha_0$, ибо их сумма меньше $180°$. Поэтому синус каждого из этих двух углов больше, чем $\sin\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть K — середина BC, тогда $KA = 3KG$. С другой стороны, по теореме синусов имеем

$$\frac{KA}{KB} = \frac{\sin\angle KBA}{\sin\angle KAB} < \frac{1}{\sin\alpha_0}, \quad \text{аналогично} \quad \frac{KB}{KG} = \frac{\sin\angle KGB}{\sin\angle KBG} < \frac{1}{\sin\alpha_0}.$$

Отсюда

$$3 = \frac{KA}{KG} = \frac{KA}{KB}\cdot\frac{KB}{KG} < \frac{1}{\sin^2\alpha_0} = 3.$$

Это противоречие завершает решение.

Схема оценивания

1. Только ответ .... 0 баллов.
2. Пример (с обоснованием), в котором три угла не меньше $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ .... 2 балла.
3. Доказательство того, что наибольшее значение α больше $30°$ .... 0 баллов.

Problem 4

The teacher has given 10 disinct positive numbers to his students. Serge found all their 45 pairwise sums; five of these sums are equal. Pete found all their 45 pairwise products. What maximum number of equal products can be among Pete's numbers?

Answer. 4.

Решение. Let $2s$ be the number that appears five times among the pairwise sums. One number obviously cannot appear in two of these sums (otherwise the other summands in these sums are also equal). Therefore the five sums equal to $2s$ contain each of the ten numbers exactly once. In each of these sums one number is less than s and another is greater than s. Let the terms less than s, in increasing order, be $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Writing $2s = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, we obtain the ordering of all the ten numbers: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}$.

If some product t^2, too, appears five times among the pairwise products, then, similarly, each of the ten numbers appears exactly once in those five products. If the smaller factors in these products are $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ and $t^2 = b_1b_{10} = b_2b_9 = b_3b_8 = b_4b_7 = b_5b_6$, then $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}$ is also an ordering of the original numbers. But then $a_i = b_i$ for all i, that is, $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ and $a_1a_{10} = a_2a_9$. It follows that $a_1 = a_2$ and $a_9 = a_{10}$, a contradiction.

An example with four equal products can be constructed in the following way. Let $x_1 = 0,9$, $x_{2k} = 2 - x_{2k-1}$ for $1 \le k \le 5$ and $x_{2k+1} = \frac{1}{2k}$ for $1 \le k \le 4$. Then $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} = 2$ and $x_2x_3 = x_4x_5 = x_6x_7 = x_8x_9 = 1$. Since obviously $x < \frac{1}{2-x} < 1$ for $0 < x < 1$, we have $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9 < < 1 < x_{10} < x_8 < x_6 < x_4 < x_2$, and the 10 numbers in this example are indeed distinct.

Marking scheme

Proof that the five equal sums contain every number exactly once:	0 points
Proof that five products cannot be equal:	3 points
Example of 4 equal products:	3 points
Complete solution:	7 points
In the example, the numbers are not proved to be distinct:	−1 point

Problem 5

A table $m \times n$ is given, where mn is divisible by 6. In this table a *stripe* is any 1×3 or 3×1 rectangle, and a *domino* is any 1×2 or 2×1 rectangle. The table is tiled with stripes. Prove that on top of this tiling the table can be tiled with dominoes so that in each stripe some two cells are covered by one domino and the remaining cell is covered by another domino. (The table is tiled by rectangles if the rectangles cover the entire table and do not overlap with each other.)

Решение. Without loss of generality suppose m is even. Consider two cases depending on the parity of n.

Case 1: n is even. Partition the table into 2×2 squares. Note that in each stripe some two adjacent cells belongs to the same square, let's cover them by a domino. Now for each square there are three possibilities: 1) all it's cells are covered by dominoes; 2) one pair of adjacent cells is covered by a domino and other two adjacent cells are uncovered – let's cover them by a domino; 3) all it's cells are uncovered – let's cover them with two dominoes. Clearly, we ontained the required tiling wih dominoes.

Case 2: n is odd. Partition the table $m \times (n-1)$ into 2×2 squares and partition the rest $m \times 1$ column with 2×1 rectangles. Again, in each stripe some two adjacent cells belongs to the same 2×2 square or 2×1 rectangle, hence we can obtain the required tiling similarly to the case 1.

Marking scheme

Considering any cases where m and n have finite number of values: .... 0 points

Unsuccessful attempts to construct the tiling step by step: .... 0 points

Introducing the graph with vertices–stripes and the edges connecting the stripes which can be tiled with two dominoes: .... 0 points

Proof that the graph described above is bipartite: .... 0 points

Solution of the problem for even m and n: .... 4 points

Problem 6

The medians of a triangle ABC concur at point G. Among the six angles GAB, GAC, GBA, GBC, GCA, GCB there are at least three angles each of which is at least α. Determine the largest α for which this is possible.

Answer. $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Denote $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

We start with presenting a triangle in which three desired angles are at least α_0. Let ABC be a right triangle with $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, and $BC = \sqrt{2}$. Then $\angle BAC = \alpha_0$. Let M and N be the midpoints of AB and AC, respectively. The right triangles NCB and BCA are similar, so $\angle NBC = \alpha_0$. The triangle MAC is isosceles, so $\angle MCA = \angle MAC = \alpha_0$. Finally, $\angle MCB = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - \alpha_0 > \alpha_0$. Hence each of the angles GBC, GCA, and GCB is at least α_0.

It remains to prove that, in an arbitrary triangle ABC, at most two of the six angles can be strictly larger than α_0. We will show that at most one of the angles GAB, GBC, and GCA is larger than α_0; the argument for the other three angles is similar.

Arguing indirectly, we may assume without loss of generality that $\angle GAB$ and $\angle GBC$ are both strictly greater than α_0. Then each of them is also less than $180^\circ - \alpha$, as their sum is less than 180°. Therefore, the sine of either angle is greater than $\sin\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Let K be the midpoint of BC; then $KA = 3KG$. On the other hand, by the sines theorem, we have

$$\frac{KA}{KB} = \frac{\sin\angle KBA}{\sin\angle KAB} < \frac{1}{\sin\alpha_0} \quad \text{and, similarly,} \quad \frac{KB}{KG} = \frac{\sin\angle KGB}{\sin\angle KBG} < \frac{1}{\sin\alpha_0}.$$

Therefore,

$$3 = \frac{KA}{KG} = \frac{KA}{KB}\cdot\frac{KB}{KG} < \frac{1}{\sin^2\alpha_0} = 3.$$

This contradiction finishes the proof.

Marking scheme

1. The answer only: .... 0 points.
2. An example (with proof) with three angles greater or equal to $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$: .... 2 points.
3. Proof that the largest α is greater than 30°: .... 0 points.