1-есеп

Әліппе n әріптен құралған. *Буын* деп кез келген екі әріптен құралған реттелген әріптер жұбын айтайық (мұнда сол екі әріп әртүрлі болуы міндетті емес). Кейбір буындар *әдепсіз* болып келеді. *Сөз* деп, құрамында әдепсіз буыны жоқ, кез келген әріптер тізімін айтамыз (әрптер саны шекті немесе шексіз болуы мүмкін). Кемінде неше әдепсіз буын санында ұзындығы шексіз болатын сөз табылмайды?

Жауабы. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Бірінші шешім. Индукция әдісі арқылы, n саны бойынша, әдепсіз буындар саны $\frac{n(n+1)}{2}$ санынан кем еместігін дәлелдейік. $n = 1$ болғанда әліппе бір, айталық, a әріптен құралған, сондықтан жалғыз мүмкін буын aa буыны әдепсіз болуы керек, өйткені кері жағдайда шексіз $aaa\ldots$ түріндегі сөз табылады.

n әріптен құралған әліппені қарастырайық. Кемінде бір әріп үшін сол әріптен басталатын барлық буындар әдепсіз болуы керек, өйткені кері жағдайда әр x әрпі үшін x-тен кейін жазуға болатын әріп табылады да, осылай шексіз сөз жазуға болады. Қалған $n-1$ әріп үшін, индукция тұжырымы бойынша, кемінде $\frac{(n-1)n}{2}$ әдепсіз буын құрастыруға болады, өйткені кері жағдайда, осы $n-1$ әріптерден шексіз сөзді жаза алушы едік). Осылайша, жалпы есепті алған кезде, кемінде $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ әдепсіз буын керек. Дәлелдеу керегі осы еді.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ әріптері үшін шексіз сөз табылмайтындай, $\frac{n(n+1)}{2}$ әдепсіз буынға мысал келтірейік. Ол үшін барлық $i \geq j$ үшін $a_i a_j$ түріндегі буындарды қарастырайық. Осы әдепсіз буындарда кез келген сөзде әріптер индекстері қатаң түрде өсу ретімен орналасуы керек, осылайша сөз шексіз бола алмайды.

Екінші шешім. Әр a әрпі үшін $aaa\ldots$ сөзін жаза алмау үшін aa буыны әдепсіз болуы керек. Әртүрлі a және b әріптері үшін $ababab\ldots$ шексіз сөзін жаза алмау үшін ab және ba буындарының кемінде біреуі әдепсіз болуы керек. Сондықтан әдепсіз буындар саны кемінде $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ болуы керек. Осы жауапқа мысал 1-шешімде көрсетілген.

Бағалау схемасы. Есеп толықтай шешілменген жағдайда

1.1. Әр aa түріндегі буын әдепсіз екені айтылса: . . . . 0 ұпай

1.2. Әр ab және ba түріндегі буынның кемінде біреуі әдепсіз екені көрсетілсе: . . . . . . 1 ұпай

1.3. Кемінде бір әріп үшін сол әріптен басталатын барлық буындар әдепсіз болуы керек екендігі айтылса: 1 ұпай

1.4. Әдепсіз буында саны кемінде $\frac{n(n+1)}{2}$ екені дәлелденсе: . . . . 3 ұпай

II. Мысал.

2.1. $\frac{n(n+1)}{2}$ әдепсіз буын үшін мысал (дәлелдеуімен) келтірілсе: . . . . 3 ұпай

2.2. $\frac{n(n+1)}{2}$ әдепсіз буын үшін мысал (дәлелдеусіз) келтірілсе Верный пример $\frac{n(n+1)}{2}$: . . . . . . 2 ұпай

III.

3.1. Есеп шешіміне бірдей әріптерден құралған буындар жоқ деп тұжырымдалу . . . . 4 ұпайдан артық бағаланбайды.

3.2. Есепт n санына тақты мән беріп шешілсе . . . . 0 ұпай

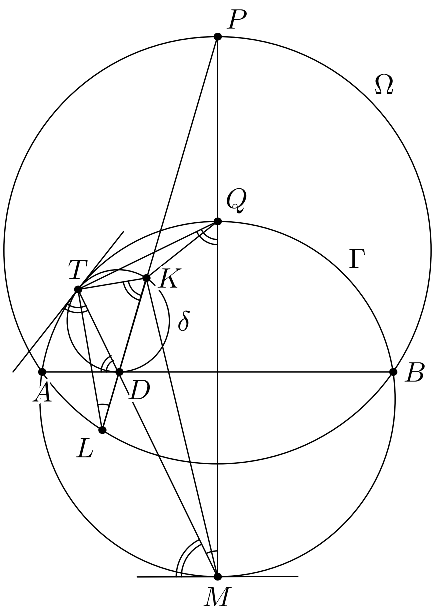
Бір тармақтың ішіндегі ұпайлар бір-бірімен қосылмайды.

Толық шешім.

4.1. Толық шешім . . . . 7 ұпай

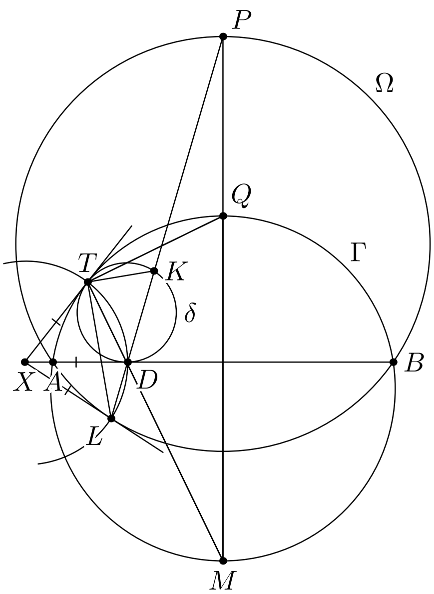
4.2. Есепті толық шешу үшін тек мысалдың орындалатын дәлелдеу ғана жеткіліксіз болса . . . . . . 6 ұпай

2-есеп



Ω және Γ шеңберлері A және B нүктелерінде қиылысады. Осы шеңберлердің центрлері арқылы өтетін түзу Ω және Γ-ны, сәйкесінше, P және Q нүктелерінде қияды (мұнда P және Q нүктелері AB-ның бір жағында жатыр әрі Q нүктесі P-ға қарағанда AB-ға жақынырақ орналасқан). δ шеңбері AB кесіндісін D, ал Γ-ны T нүктесінде жанайды (мұнда δ шеңбері және P, Q нүктелері AB-ның бір жағында жатыр). PD түзуі δ-ны екінші рет K, ал Ω-ны екінші рет L нүктесінде қияды. $\angle QTK = \angle DTL$ екенін дәлелдеңіз.

Бірінші шешім. Жалпылықты сақтай отырып, D нүктесі B нүктесіне қарағанда A нүктесіне жақынырақ болсын. M нүктесі Γ шеңберінің AB доғасының (Q қамтымайтын) ортасы болсын. Архимед леммасы бойынша T, D, M нүктелері бір түзудің бойында жатыр. Онда, бір жағынан $DA \cdot DB = DT \cdot DM$, екінші жағынан $DA \cdot DB = DP \cdot DL$, демек $DT \cdot \cdot DM = DP \cdot DL$, сондықтан $LTPM$ төртбұрышы іштей сызылған төртбұрыш болады, осыдан $\angle KLT = \angle QMT$. δ шеңбері Γ-мен T нүктесінде жанасқандықтан, $\angle TKD = \angle TQM$, өйткені TM мен оларға ортақ жанама арасындағы бұрыш хорданы керетін бұрышқа тең. Сонда TKL және TQM үшбұрыштарында тең екі бұрыштар табылып тұр, демек олардың үшінші бұрыштары тең, яғни $\angle LTK = \angle MTQ$, откуда $\angle LTD = \angle KTQ$.



Екінші шешім. 1-шешімдегідей Γ шеңберінде MQ кесіндісі диаметр болсын. Архимед леммасы бойынша M нүктесі TD түзуінің бойында жатыр. Сол лемма бойынша да AB түзуін D, Ω шеңберін L нүктесінде жанайтын қайсібір μ шеңбері табылады. Γ, μ және δ шеңберлірінің радикал центрі, оны X деп атайық, ол AB түзуі мен Γ және Ω шеңберлеріне, сәйкесінше, T және L нүктелерінде жүргізілген жанамалардың қиылысу нүктесі болып табылады. Демек, $XL = XT = XD$, әрі X нүктесі TDL үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер центрі болып табылады. Яғни $\angle DTL = = \frac{1}{2}\angle DXL = 90^\circ - \angle XDL = 90^\circ - \angle KDB$. Екінші жағынан $\angle QTM = 90^\circ$, өйткені MQ — диаметр. Осыдан $\angle QTK = 90^\circ - \angle DTK = 90^\circ - \angle KDB = = \angle DTL$.

Бағалау схемасы

Аяқталмаған санаулар шешімі (координата әдісі, комплекс сандарда, в векторларда, тригонометриялық әдіс, т.с.с.): .... **0 ұпай**

1-шешімге берілетін ұпайлар.

1.1. T, D, M нүктелері бір түзудің бойында жатқанын дәлелдесе: **0 ұпай**

1.2. $LTPM$ төртбұрышы іштей сызылғанын дәлелдесе: .... **3 ұпай**

1.3. $\angle TKD = \angle TQM$ немесе $TKQP$ төртбұрышы іштей сызылғанын дәлелдесе: .... **3 ұпай**

2-шешімге берілетін ұпайлар.

2.1. T, D, M нүктелері бір түзудің бойында жатқанын дәлелдесе: .... **0 ұпай**

2.2. μ шеңберін енгізіп оны тек қарастырса: .... **0 ұпай**

2.3. δ (немесе Γ) және μ шеңберлеріне T мен L нүктелерінде жүргізілген жанамалар AB қиылысатынын дәлелдесе, немесе осы түзуде TDL үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі жатқаны дәлелденсе: **3 ұпай**

2.4. 2.3 тармағындағы тұжырып нақты айтылып, бірақ дәлелденбей, есеп шартын осы тұжырымға алып келсе: .... **3 ұпай**

Әртүрлі шешімдердегі жеке алынған тұжырымдарға берілетін ұпайлар өзара қосылмайды.
Жоғарыдағы айтылған тұжырымдар тек айтылып, бірақ дәлелденбесе .... **0 ұпай**

3-есеп

Натурал d саны толық квадрат емес. Натурал n саны үшін $s(n)$ арқылы $\sqrt{d}$ санының екілік жүйедегі жазылуында алдыңғы n цифрлардың арасында кездесетін бірліктер санын белгілейміз (мұнда екілік жүйедегі үтірге дейінгі цифрлар да есептелінеді). Барлық натурал $n \geqslant A$ үшін $s(n) > \sqrt{2n} - 2$ болатындай натурал A санының табылатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Бізге келесі түсінік қажет болады: егер санның екілік жүйедегі жазылуы шекті болса әрі k бірлігі бар болса, онда сол санның кез келген екінің дәрежелерінің (бүтін көрсеткіштері бар) қосындысы түрінде жазылуында кемінде k қосынғыш бар. Шынымен де, санды екінің *әртүрлі* дәрежелерінің қосындысы түрінде келтіруі, яғни екілік жүйедегі жазылуы, жалғыз түрде ғана. Екінші жағынан, егер екінің дәрежелерінің жазылуында екі бердей дәреже болса, онда қосылғыш санын азайтуға болады. Оны біз $2^s + 2^s = 2^{s+1}$ арқылы жасаймыз; сонда ерте ма, кеш пе, қосылғыштар әртүрлі болады, яғни қосылғыштар саны азайған кезде олардың саны кемінде k болады.

m саны $[\sqrt{d}]$ санының екілік жазылуындағы разрядтар саны болсын, яғни $2^{m-1} < \sqrt{d} < 2^m$. $\sqrt{d}$ санының екілік жазылуындағы бастапқы n цифрды жазайық:

$$\sqrt{d} - 2^{m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} < \sqrt{d}$$

(мұнда теңсіздік қатаң түрде болады, өйткені $\sqrt{d}$ саны иррационал сан). Теңдікті квадраттап,

$$d - 2^{1+m-n}\sqrt{d} + 2^{2m-2n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d$$

екенін аламыз. Оның сол жағы $d - 2^{1+2m-n}$ санынан үлкен, сондықтан

$$d - 2^{1+2m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

Соңғы теңсіздіктің ортасындағы өрнек натурал d санынан кіші, әрі сол санның d-дан айырмашылығы 2^{1+2m-n} санынан кіші, яғни $n > 2m + 1$ болғанда оның екілік жазылуында бірліктер саны $n - 2m - 1$-ден аз. Екінші жағынан ол сан екінің дәреженің қосындысы түрінде келген, ал қосындылар саны $\frac{k(k+1)}{2}$-ге тең. Жоғарыдағы түсінік бойынша $\frac{k(k+1)}{2} \geq n - 2m - 1$. Демек, егер $k \leq \sqrt{2n} - 2$ болса, онда

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}-1)}{2} = n - \frac{3}{2}\sqrt{2n} + 1,$$

ал бұл сан жеткілікті үлкен n-дер үшін $n - 2m - 1$ санынан кіші. Яғни, жеткілікті үлкен n үшін $k > \sqrt{2n} - 2$ теңсіздігі орындалады. Дәлелдеу керегі осы еді.

Бағалау схемасы

1. Қосындының квадраты екінің дәреженің қосындысы түрінде келген, ал қосындылар саны $\frac{k(k+1)}{2}$-ге тең екені көрсетілсе .... 1 ұпай
2. $s(n) > \sqrt{2n} - C$ бағалауы қайсібір тұрақты C үшін алынса .... 5 ұпай (1 тармақпен қосылмайды).

Задача 1

Алфавит состоит из n букв. *Слогом* назовём любую упорядоченную пару, состоящую из двух не обязательно различных букв. Некоторые слоги считаются *неприличными*. *Словом* является любая (конечная или бесконечная) последовательность букв, в которой нет неприличных слогов. Найдите наименьшее возможное количество неприличных слогов, при котором не существует бесконечных слов.

Ответ. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Первое решение. Докажем, что количество неприличных слогов не может быть меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, индукцией по n. При $n = 1$ алфавит состоит из одной буквы a, и единственный слог aa должен быть неприличным, иначе существует бесконечное слово $aaa\ldots$.

Рассмотрим алфавит из n букв. Хотя бы для одной буквы должны быть неприличными все начинающиеся с неё слоги (в противном случае для каждой буквы x есть буква, которую можно написать после x, действуя таким образом, можно написать бесконечное слово). Остальные $n-1$ букв по предположению индукции должны образовывать не менее $\frac{(n-1)n}{2}$ неприличных слогов (иначе бесконечное слово удастся составить уже из этих $n-1$ букв). Таким образом, всего получается не менее $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов, что и требовалось доказать.

Пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов, для которых не существует бесконечных слов в алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$, доставляют все слоги вида a_ia_j с $i \geq j$. При таких неприличных слогах в любом слове индексы букв должны строго возрастать, и слово не может быть бесконечным.

Второе решение. Для каждой буквы a слог aa должен быть неприличным, чтобы нельзя было написать бесконечное слово $aaa\ldots$. Для двух различных букв a и b хотя бы один из слогов ab и ba должен быть неприличным, чтобы нельзя было написать бесконечное слово $ababab\ldots$

Поэтому количество неприличных слогов должно быть не менее $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример с таким количеством неприличных слогов приведён в первом решении.

Схема оценивания. Частичные продвижения

1.1. Замечено, что каждый слог вида aa неприличный: .... 0 баллов

1.2. Замечено, что хотя бы один из слогов ab и ba неприличный: .... 1 балл

1.3. Замечено, что хотя бы для одной буквы должны быть неприличными все начинающиеся с неё слоги: 1 балл

1.4. Доказательство того, что неприличных слогов не менее $\frac{n(n+1)}{2}$: .... 3 балла

II. Пример.

2.1. Верный пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов с доказательством: .... 3 балла

2.2. Верный пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов без доказательства: .... 2 балла

III.

3.1. Решение задачи в предположении, что не существует слогов из двух одинаковых букв, оценивается не более чем 4 баллами.

3.2. Решение задачи для конечного количества конкретных значений числа n оценивается .. в 0 баллов.

Баллы за частичные продвижения внутри одного пункта не суммируются друг с другом.

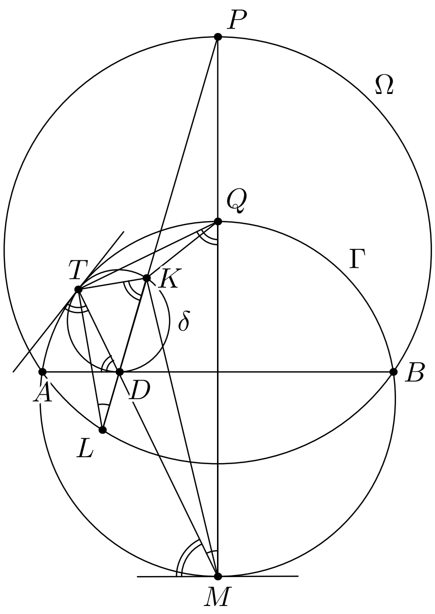
Полное решение.

4.1. Полное решение задачи оценивается .... в 7 баллов.

4.2. Решение задачи, которому для полноты не хватает только обоснования приведённого примера, оценивается .... в 6 баллов.

Задача 2

Окружности Ω и Γ пересекаются в точках A и B. Линия центров этих окружностей пересекает Ω и Γ в точках P и Q соответственно так, что они лежат по одну сторону от прямой AB, причём точка Q расположена ближе к этой прямой. По ту же сторону от AB взята окружность δ, касающаяся отрезка AB в точке D и Γ в точке T. Прямая PD вторично пересекает δ и Ω в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle QTK = \angle DTL$.



Первое решение. Без потери общности, пусть D лежит ближе к A чем к B. Пусть M — середина дуги AB окружности Γ, не содержащей точку Q. По лемме Архимеда точки T, D, M лежат на одной прямой. Тогда, с одной стороны, $DA \cdot DB = DT \cdot DM$, а с другой, $DA \cdot DB = DP \cdot DL$, то есть $DT \cdot DM = DP \cdot DL$, поэтому четырехугольник $LTPM$ вписанный, откуда $\angle KLT = \angle QMT$. Так как δ касается Γ, то $\angle TKD = \angle TQM$, как углы между прямой TM и общей касательной в точке T. В треугольниках TKL и TQM нашлись две пары равных углов, поэтому, в них $\angle LTK = \angle MTQ$, откуда $\angle LTD = \angle KTQ$.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку M, диаметрально противоположную точке Q в окружности Γ и звметим, что она лежит на прямой TD по лемме Архимеда. По той же лемме, существует окружность μ, касающаяся прямой AB и окружности Ω в точках D и L соответственно. Радикальный центр X окружностей Γ, μ и δ — это точка пересечения AB и касательных к Γ и Ω в точках T и L соответственно. Следовательно, $XL = XT = XD$. и X — центр окружности, описанной около треугольника TDL. Значит, $\angle DTL = \frac{1}{2}\angle DXL = 90^\circ - \angle XDL = 90^\circ - \angle KDB$. С другой стороны, $\angle QTM = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, поэтому $\angle QTK = 90^\circ - \angle DTK = 90^\circ - \angle KDB = \angle DTL$.

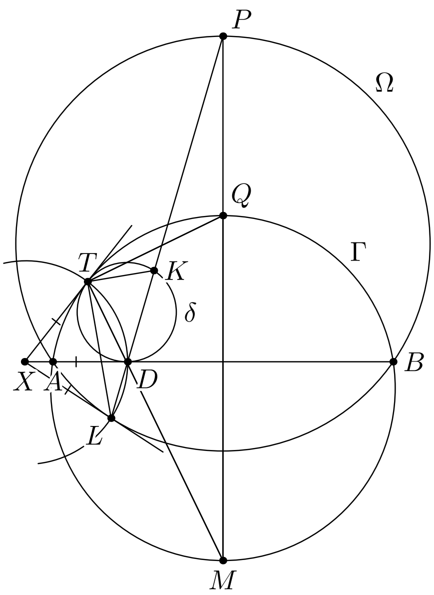


Схема оценивания

Недоведенное счетное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.): .... **0 баллов**

Частичные баллы к первому решению.

1.1. Доказано, что точки T, D, M лежат на одной прямой: **0 баллов**

1.2. Доказано, что $LTPM$ – вписанный четырехугольник: ...**3 балла**

1.3. Доказано равенство $\angle TKD = \angle TQM$ или вписанность четырехугольника $TKQP$: .... **3 балла**

Частичные баллы ко второму решению.

2.1. Доказано, что точки T, D, M лежат на одной прямой: **0 баллов**

2.2. Введена в рассмотрение окружность μ: .... **0 баллов**

2.3. Доказано, что касательные к δ (или Γ) и μ в точках T и L пересекаются на прямой AB, или доказано, что на этой прямой лежит центр описанной окружности треугольника TDL: .... **3 балла**

2.4. Один из фактов в 2.3 явно сформулирован (но не доказан), **и** утверждение задачи сведено к этому факту: .... **3 балла**

Частичные баллы к *разным* решениям не суммируются между собой.

Лишь *формулировки* фактов, упомянутых выше, без явного доказательства оцениваются в 0 баллов.

Задача 3

Натуральное число d не является точным квадратом. Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ количество единиц среди первых n цифр двоичной записи числа $\sqrt{d}$ (цифры до запятой тоже учитываются). Докажите, что существует такое натуральное A, что при всех натуральных $n \geq A$ выполнено неравенство $s(n) > \sqrt{2n} - 2$.

Решение. Нам потребуется следующее соображение: если двоичная запись числа конечна и содержит k единиц, то любое представление этого числа в виде суммы степеней двойки с целыми показателями содержит не менее k слагаемых. Действительно, представление числа в виде суммы *различных* степеней двойки с целыми показателями (то есть двоичная запись) единственно. С другой стороны, если в представлении числа суммой степеней двойки есть одинаковые слагаемые, их количество можно уменьшать, производя замены вида $2^s + 2^s = 2^{s+1}$; рано или поздно такие замены закончатся, и тогда все слагаемые станут различными, то есть и после сокращений их будет не меньше k.

Пусть m – количество разрядов в двоичной записи числа $[\sqrt{d}]$, то есть $2^{m-1} < \sqrt{d} < 2^m$. Запишем первые n цифр двоичной записи числа $\sqrt{d}$:

$$\sqrt{d} - 2^{m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} < \sqrt{d}$$

(неравенства строгие, так как $\sqrt{d}$ иррационально). Возводя в квадрат, получаем

$$d - 2^{1+m-n}\sqrt{d} + 2^{2m-2n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

Левая часть больше, чем $d - 2^{1+2m-n}$, так что

$$d - 2^{1+2m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

Средняя часть последнего неравенства меньше натурального числа d на число, меньшее 2^{1+2m-n}, то есть при $n > 2m+1$ в её двоичной записи не менее $n - 2m - 1$ единиц. С другой стороны, она представлена в виде суммы $\frac{k(k+1)}{2}$ степеней 2. В силу замечания из первого абзаца получаем $\frac{k(k+1)}{2} \geq n - 2m - 1$. Значит, если $k \leq \sqrt{2n} - 2$, то

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}-1)}{2} = n - \frac{3}{2}\sqrt{2n} + 1,$$

что при достаточно больших n меньше, чем $n - 2m - 1$. Значит, при всех достаточно больших n имеем $k > \sqrt{2n} - 2$, что и требовалось доказать.

Схема оценивания

1. Замечено, что квадрат суммы k степеней двойки представляется в виде суммы $\frac{k(k+1)}{2}$ степеней двойки 1 балл

2. Доказана оценка $s(n) > \sqrt{2n} - C$ с некоторым постоянным C ....5 баллов (не суммируется с предыдущим).

Problem 1

In an alphabet of n letters, a *syllable* is any ordered pair of two (not necessarily distinct) letters. Some syllables are considered *indecent*. A *word* is any sequence, finite or infinite, of letters, that does not contain indecent syllables. Find the least possible number of indecent syllables for which infinite words do not exist.

Answer. $\frac{n(n+1)}{2}$.

First solution. We will prove by induction on n that the number of indecent syllables cannot be less than $\frac{n(n+1)}{2}$. For $n = 1$ the alphabet contains only one letter, say, a, and the only syllable aa has to be indecent, otherwise an infinite word $aaa\ldots$ exists.

Consider an alphabet of n letters. There is at least one letter such that all the syllables beginning with it are indecent (otherwise for each letter x there is a letter that can be written after x; acting in this way we can write an infinite word). By the induction hypothesis, the remaining $n-1$ letters form at least $\frac{(n-1)n}{2}$ indecent syllables (otherwise there is an infinite word made of those $n-1$ letters). Thus, in total we have at least $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, q.e.d.

An example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables for which there is no infinite word in the alphabet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is the set of all syllables a_ia_j with $i \geq j$. When all such syllables are indecent, the indices of letters in any word form a strictly increasing sequence, and the word cannot be infinite.

Second solution. For every letter a, the syllable aa should be indecent, otherwise an infinite word $aaa\ldots$ exists. Moreover, for any two different letters a and b, at least one of the syllables ab and ba should be indecent, otherwise there exists an infinite word $ababab\ldots$

Therefore, the number of indecent syllables is at least $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. An example with this number of indecent syllables is presented in the first solution.

Marking scheme

Partial progress

Part I. Lower bound.

1.1. Observation that every syllable of the form aa is indecent: .... 0 points.
1.2. Observation that at least one of the syllables ab and ba is indecent: .... 1 point.
1.3. Observation that there exists a letter such that all syllables starting from that lettes are indecent: 1 point.
1.4. A complete proof that the number of indecent syllables is at least $\frac{n(n+1)}{2}$: .... 3 points

Part II. Construction.

2.1. A correct example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, with proof: .... 3 points.
2.2. An example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, without proof: .... 2 points.

Part III.

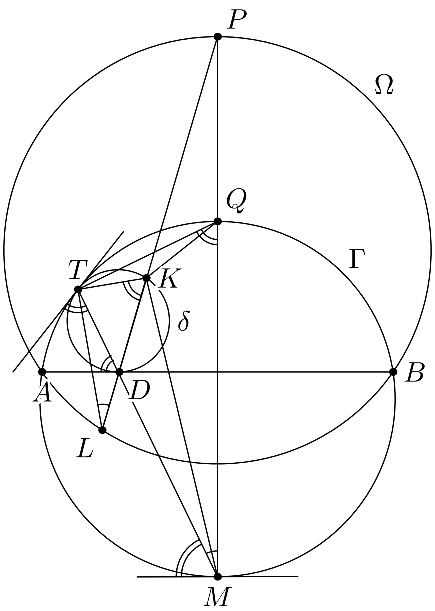
3.1. Solution made on the supposition that there are no syllables with two identical letters: at most 4 points.
3.2. Solution of the problem for a finite number of particular values of n is worth .... 0 points.

Points for partial progress inside one part are not to be added to each other.

Complete solution.

4.1. A complete solution is worth .... 7 points.
4.2. If the construction lacks the proof in an otherwise complete solution, it is worth .... 6 points.

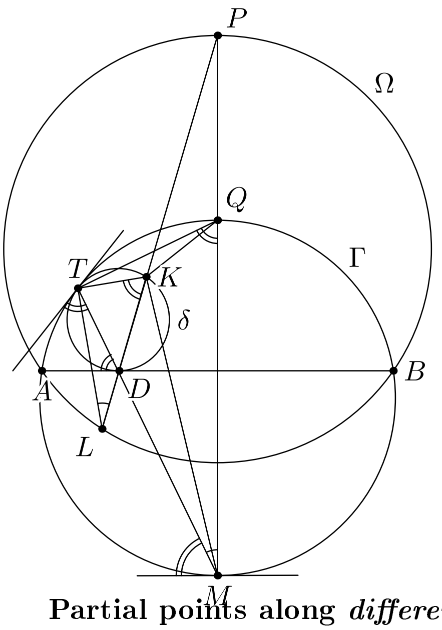
Problem 2



Circles Ω and Γ meet at points A and B. The line containing their centres intersects Ω and Γ at points P and Q, respectively, such that these points lie on the same side of the line AB and point Q is closer to AB than point P. The circle δ lies on the same side of the line AB as P and Q, touches the segment AB at point D and touches Γ at point T. The line PD meets δ and Ω again at points K and L, respectively. Prove that $\angle QTK = \angle DTL$.

First solution. Assume without loss of generality that D is nearer to A than to B. Let M be the midpoint of the arc AB of Γ that does not contain Q. By Archimedes' lemma, the points T, D, and M are collinear. Then, on the one hand, $DA \cdot DB = DT \cdot DM$, and on the other hand $DA \cdot DB = DP \cdot DL$, that is, $DT \cdot DM = DP \cdot DL$, therefore quadrilateral $LTPM$ is cyclic, hence $\angle TLK = \angle TMQ$. Since δ touches Γ, we have $\angle TKL = \angle TQM$ as angles between the line TM and the common tangent at point T. The triangles LTK and MTQ have two pairs of equal angles, therefore $\angle LTK = \angle MTQ$, whence $\angle LTD = \angle KTQ$.

Second solution. As in the first solution, we introduce the point M opposite to Q in Γ and notice that the points M, T, and D are collinear, due to Archimedes' lemma. By the same lemma, there exists a circle μ tangent to AB and to Ω at D and L, respectively. The radica; center X of the circles Γ, μ, and δ is the meeting point of AB and the tangents to Γ and Ω at T and L, respectively. Hence $XL = XT = XD$,.and thus X is the circumcenter of the triangle TDL. Therefore, $\angle DTL = \frac{1}{2}\angle DXL = 90° - \angle XDL = 90° - \angle KDB$. On the other hand, $\angle QTM = 90°$ by Tpales' theorem, and hence $\angle QTK = 90° - \angle DTK = 90° - \angle KDB = \angle DTL$.



Marking scheme

Incomplete analytic solution (using coordinates, complex numbers, vectors, trigonometry and so on) is worth **0 points**

Partial points along the first solution.

1.1. Proof that T, D, and M are colinear: .... **0 points**

1.2. Proof that $LTPM$ is cyclic: .... **3 points**

1.3. Proof that $\angle TKL = \angle TQM$ or, equivalently, that $TKQP$ is cyclic: **3 points**

Partial points along the second solution.

2.1. Ptoof that T, D, and M are colinear: .... **0 points**

2.2. Just an introduction of circle μ: .... **0 points**

2.3. Proof that the tangents to δ (or Γ) and μ at T and L meet on AB, ot, equivalently, proof that the circumcenter of TDL lies on AB: ..... **3 points**

2.4. One of the facts in 2.3 is explicitly formulated (yet not proved), **and** the problem is reduced to that fact: .... **3 балла**

Partial points along *different* solutions are not to be added to each other.
Just *stating* the facts mentioned above without direct proofs is worth no points.

Problem 3

Positive integer d is not a perfect square. For each positive integer n, let $s(n)$ denote the number of digits 1 among the first n digits in the binary representation of $\sqrt{d}$ (including the digits before the point). Prove that there exists an integer A such that $s(n) > \sqrt{2n} - 2$ for all integers $n \geq A$.

Solution. We will make use of the following

Observation. If the binary representation of a number is finite and contains k digits 1, then every representation of this number as a sum of powers of 2 with integral exponents contains at least k terms.

Indeed, the representation of a number as a sum of powers of 2 with *distinct* integral exponents (that is, its binary representation) is unique. On the other hand, if a representation of the number as a sum of powers of 2 contains equal terms, the number of terms can be reduced (by changes of the form $2^s + 2^s = 2^{s+1}$) until all the terms are distinct.

Let m be the number of digits in the binary representation of $[\sqrt{d}]$ (that is, $2^{m-1} < \sqrt{d} < 2^m$). Then for the first n digits of the binary representation of $\sqrt{d}$ we have the inequalities

$$\sqrt{d} - 2^{m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} < \sqrt{d}$$

(the inequalities are strict, since $\sqrt{d}$ is irrational).

Squaring this inequality we get

$$d - 2^{1+2m-n} < d - 2^{1+m-n}\sqrt{d} + 2^{2m-2n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

The middle part of this inequality is less than the positive integer d by a number smaller than 2^{1+2m-n}, that is, for $n > 2m+1$ its binary representation contains at least $n - 2m - 1$ digits 1. On the other hand, it is a sum of $\frac{k(k+1)}{2}$ powers of 2. It follows from the above observation that $\frac{k(k+1)}{2} > n - 2m - 1$. If $k \leq \sqrt{2n} - 2$, then

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}-1)}{2} = n - \frac{3}{2}\sqrt{2n} + 1,$$

which is less than $n - 2m - 1$. Thus $k > \sqrt{2n} - 2$ for large enough n, q.e.d.

Marking scheme

1. An observation that the square of a sum of k powers of 2 is a sum of $\frac{k(k+1)}{2}$ powers of 2: ....1 point.
2. The inequality $s(n) > \sqrt{2n} - C$ is proved for some constant C:5 points (not additive with the above point).