XX International Zhautykov Olympiad in Mathematics. Almaty, 9 January 2024

First day

(Time allowed is 4.5 hours. Each problem is worth 7 points)

№1. In an alphabet of n letters, a *syllable* is any ordered pair of two (not necessarily distinct) letters. Some syllables are considered *indecent*. A *word* is any sequence, finite or infinite, of letters, that does not contain indecent syllables. Find the least possible number of indecent syllables for which infinite words do not exist.

№2. Circles Ω and Γ meet at points A and B. The line containing their centres intersects Ω and Γ at points P and Q, respectively, such that these points lie on the same side of the line AB and point Q is closer to AB than point P. The circle δ lies on the same side of the line AB as P and Q, touches the segment AB at point D and touches Γ at point T. The line PD meets δ and Ω again at points K and L, respectively. Prove that $\angle QTK = \angle DTL$.

№3. Positive integer d is not a perfect square. For each positive integer n, let $s(n)$ denote the number of digits 1 among the first n digits in the binary representation of $\sqrt{d}$ (including the digits before the point). Prove that there exists an integer A such that $s(n) > \sqrt{2n} - 2$ for all integers $n \geq A$.

XX Международная Жаутыковская олимпиада по математике. Алматы, 9 января 2024 года

Первый день

(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов)

№1. Алфавит состоит из n букв. *Слогом* назовём любую упорядоченную пару, состоящую из двух не обязательно различных букв. Некоторые слоги считаются *неприличными*. *Словом* является любая (конечная или бесконечная) последовательность букв, в которой нет неприличных слогов. Найдите наименьшее возможное количество неприличных слогов, при котором не существует бесконечных слов.

№2. Окружности Ω и Γ пересекаются в точках A и B. Линия центров этих окружностей пересекает Ω и Γ в точках P и Q соответственно так, что они лежат по одну сторону от прямой AB, причём точка Q расположена ближе к этой прямой. По ту же сторону от AB взята окружность δ, касающаяся отрезка AB в точке D и Γ в точке T. Прямая PD вторично пересекает δ и Ω в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle QTK = \angle DTL$.

№3. Натуральное число d не является точным квадратом. Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ количество единиц среди первых n цифр двоичной записи числа $\sqrt{d}$ (цифры до запятой тоже учитываются). Докажите, что существует такое натуральное A, что при всех натуральных $n \geqslant A$ выполнено неравенство $s(n) > \sqrt{2n} - 2$.

Математикадан халықаралық XX Жәутіков олимпиадасы. Алматы, 9 қаңтар 2024 жыл

Бірінші күн

(Жұмысты орындау уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№1. Әліппе n әріптен құралған. *Буын* деп кез келген екі әріптен құралған реттелген әріптер жұбын айтайық (мұнда сол екі әріп әртүрлі болуы міндетті емес). Кейбір буындар *әдепсіз* болып келеді. *Сөз* деп, құрамында әдепсіз буыны жоқ, кез келген әріптер тізімін айтамыз (әрптер саны шекті немесе шексіз болуы мүмкін). Кемінде неше әдепсіз буын санында ұзындығы шексіз болатын сөз табылмайды?

№2. Ω және Γ шеңберлері A және B нүктелерінде қиылысады. Осы шеңберлердің центрлері арқылы өтетін түзу Ω және Γ-ны, сәйкесінше, P және Q нүктелерінде қияды (мұнда P және Q нүктелері AB-ның бір жағында жатыр әрі Q нүктесі P-ға қарағанда AB-ға жақынырақ орналасқан). δ шеңбері AB кесіндісін D, ал Γ-ны T нүктесінде жанайды (мұнда δ шеңбері және P, Q нүктелері AB-ның бір жағында жатыр). PD түзуі δ-ны екінші рет K, ал Ω-ны екінші рет L нүктесінде қияды. $\angle QTK = \angle DTL$ екенін дәлелдеңіз.

№3. Натурал d саны толық квадрат емес. Натурал n саны үшін $s(n)$ арқылы $\sqrt{d}$ санының екілік жүйедегі жазылуында алдыңғы n цифрлардың арасында кездесетін бірліктер санын белгілейміз (мұнда екілік жүйедегі үтірге дейінгі цифрлар да есептелінеді). Барлық натурал $n \geqslant A$ үшін $s(n) > \sqrt{2n} - 2$ болатындай натурал A санының табылатынын дәлелдеңіз.