№4. The sum of $n > 2$ nonzero real numbers, not necessarily distinct, is 0. For each of $2^n - 1$ ways to select several of those numbers (at least one) the sum of the selected numbers is calculated; all the resulting sums are written in line in non-increasing order. The first number in the line equals S. Determine the minimum possible value of the second number in the line.

Answer: $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Solution. Let us arrange all the numbers in non-decreasing order as follows:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m < 0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_k,$$

where $m+k = n$. Clearly, the largest number written in the line is equal to the sum of all positive numbers, i. e. $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = -a_1 - a_2 - \ldots - a_m$, and the second number in the line is obtained from S either by subtracting the smallest positive number b_1 or by adding the largest negative number a_m. Denote $c = \min\{b_1, |a_m|\}$, then, on the one hand, $S \ge kb_1 \ge kc$, and on the other hand, $S \ge m|a_m| \ge mc$. At least one of the numbers m and k is not less than $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, hence $c \le \min\{\frac{S}{k}, \frac{S}{m}\} \le \frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Therefore the second number in the line cannot be less than $S - c \ge S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

The second number in the line could be equal to $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, for example, if we are given $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ numbers equal to $\frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, and $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ numbers equal to $-\frac{S}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Marking scheme.

Points withih each of the sections ,,Answer and example" and ,,Lower bound" are not additive. The final mark is equal to the sum of the highest scores of the sections.

Answer and example.

- Correct answer .... **0 points**
- Any finite number of examples where the second number is $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ .... **0 points**

1. An example where the second highest number equals $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ for all n of some patity .... **1 point**
2. An example where the second highest number equals $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ for all n .... **2 points**

Lower bound.

- A correct lower bound is obtained for any finite set of numbers n .... **0 points**

3. A correct lower bound is obtained for all numbers n of some parity .... **3 points**
4. A correct lower bound is obtained for all numbers n .... **5 points**

№5. We call a positive integer *good* if it can be presented in the form $ax^2 + bxy + cy^2$ with integral a, b, c, x, y and $b^2 - 4ac = -20$. Prove that the product of every two good numbers is also good.

Solution. In accordance with the other solutions we note that a good number is a number of the form $ax^2 + bxy + cy^2$, where $b^2 - ac = 5$.

Claim. A number n is good if and only if the only odd powers of primes in its prime factorization are those of primes p such that the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{p}$ is solvable.

Proof. Let $n = ax^2 + bxy + cy^2$, $d = (x, y)$, $x = dx'$, $y = dy'$, $(x', y') = 1$. Then $n = d^2n'$, and the primes with odd powers in the factorization of n' are the same as in that of n. Consider one such prime p. It does not divide at least one of the numbers x' and y'; let it be y'. We have $an' = (ax' + by')^2 + 5y'2$, i. e. $(ax' + by')^2 \equiv -5y'2 \pmod{p}$. Since $y' \not\equiv 0 \pmod{p}$, there is an integer α such that $ax' + by' \equiv \alpha y' \pmod{p}$. This α satisfies $\alpha^2 \equiv -5 \pmod{p}$. Thus we have proved that p satisfies the stated condition.

Conversely, let all the primes p, having odd powers in the factorization of n, are such that the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{p}$ is solvable. If $n' = p_1 \dots p_k$ is the product of all such primes, then $n = d^2n'$ for some integer d. Since all the congruences $x^2 \equiv -5 \pmod{p}_i$ are solvable, it follows from from Chinese Remainder Theorem that so is the congruence $x^2 \equiv -5 \pmod{n}'$. Let b be the solution of this congruence. This means that $b^2 - n'c = -5$ for some integer c. But then $n = n'd^2 + bd \cdot 0 + c \cdot 0^2$ is a good number, and the claim is proved.

To solve the problem it remains to note that the product of two numbers of the form described in the claim also has that form.

Marking scheme

General

(0.1) The identity $(x^2 + 5y^2)(z^2 + 5t^2) = (xz - 5yt)^2 + 5(xt + yz)^2$: .... **0 points**

(0.2) The statement is proved for two good numbers of the form $ax^2 + bxy + cy^2$ with equal a:**2 points** (not additive)

(3.1) Proved that if a prime p divides $ax^2 + bxy + cy^2$ but not x or y then -5 is a quadratic residue mod$p$: ....**1 point**

(3.2) Proved that all n containing only primes p such that -5 is a quadratic residue modulo p are good **3 points**

All the points in the scheme for the third solution are additive.

Points from schemes for different solutions are not additive.

№6. Several blue and green napkins (possibly of different sizes) with vertical and horizontal sides are placed on the plane. It turned out that every two napkins of different colours can be intersected by a vertical or horizontal line (possibly on the border). Prove that one can choose a colour, two horizontal lines, and one vertical line, so that every napkin of the chosen colour is intersected by at least one chosen line.

Solution. Notation. Throughout the solution we suppose that we work in the Cartesian plane, with the axis OX directed horizontally and OY directed vertically. The orthogonal projections onto axes OX (horizontal) and OY (vertical) will be denoted π_X and π_Y respectively. Clearly a vertical line intersecting all the napkins $B_1, \ldots, B_k$ exists if and only if the segments $\pi_x(B_1), \ldots, \pi_X(B_k)$ have a common point; henceforth we will say, for sake of brevity, that these segments are *pierced* by a point (and the napkins are *pierced* by a line).

For two segments ℓ_1 and ℓ_2 on a line we will call their *hull* $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ the smallest segment containing both ℓ_1 and ℓ_2. In other words, $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ is the union of ℓ_1 and ℓ_2, if they overlap, and the union of ℓ_1, ℓ_2, and the interval between, if they do not.

We make use of the following

Lemma 1 (one-dimensional Helly's theorem). If in a finite family of segments in a line every two segments overlap, then there is a point piercing them all.

(Generally speaking, the theorem holds even for infinite families, but we have no time for subtleties.)

Proof. Consider the segment with the leftmost right end $\ell_1 = [a, b]$ and the segment eith the rightmost left end $\ell_2 = [c, d]$. They overlap; in particular, that means $b \geqslant c$. But then the right end of any segment is no further left than b, while its left end is no frther right than c, that is, the segment contains all the points of the segment $[c, b]$ (that segment is possibly degenerate, but not empty). □

We will use Lemma 1 from the previous solution.

Say that a family of napkins is *good* if all napkins in the family can be pierced by a horizontal line; otherwise the family is *bad*. According to the Lemma, if a family is bad, then it contains two napkins whose projections onto the y-axos are disjoint.

Every vertical line ℓ partitions the napkins into three groups: the group $I(\ell)$ consisting of the napkins pierced by ℓ, the group $L(\ell)$ consisting of all napkins lying strictly to the left of ℓ, and the group $R(\ell)$ consisting of all napkins lying strictly to the right of ℓ.

Suppose that, for some vertical line ℓ, there exists a color (say, blue) such that the family of blue napkins in $L(\ell)$ is good, and the family of blue napkins in $R(\ell)$ is also such. If a and b are horizontal lines piercing those two families, then the three lines ℓ, a, and b form a desired collection of three lines piercing all blue napkins. So, in the dequel, we assume that there is no such line.

Consider the rightmost vertical line ℓ_0 such that the family of blue napkins in $L(\ell)$, as well as the family of green napkins in $L(\ell)$, is good. This means that there are two napkins of the same color (say, blue napkins W_1 and W_2) such that their y-projections are disjoint, and after shifting ℓ_0 rightwards to a line ℓ, both napkins fall into $L(\ell)$. So both napkins lie (non-strictly) to the left of ℓ_0. Without loss of generality, we assume that the y-projection of $@_1$ is above that of W_2.

By our assumption, the family of green napkins in $R(\ell)$ is bad (since the family of green napkins in $L(\ell)$ is good); so $R(\ell)$ comtains two green napkins b_1 and b_2 whose y-projections are disjoint. Without loss of generality, we assume that the y-projection of B_1 is above that of B_2.

Not losing generality again, we assume that the bottom point of B_1 is no higher than that of W_1. Then the y-projections of W_1 and B_2 are disjoint. But their x-projections are also disjoint, since one lies (non-strictly) to the left of ℓ_0, while the other lies strictly to the right of it. Hence these napkins fail to satisfy the problem requirements. A contradiction.

Marking scheme

(0.1) Consideration of any particular cases, as well as (partially) wrong arguments
. . . . **0 points**

(0.2) Initial steps, such as: reformulation of the problem in terms of x- and y-projections, or formulating and proving Lemma 1, etc. . . . . **0 points**

Scheme for current solution

(1.1) Describing (as in Solution 2) a sufficinnt confition that a vertical line ℓ can be augmented by two horizontal ones in order to get a desired triple .... **1 point**

(1.2) If (1.1): is present, by means of choosing the rightmost/leftmost/etc. element, or via moving a vertical line ℓ, one chooses a line ℓ_0 sering the aims of Solution 2 ....**2 points**

№4. Нөлге тең емес нақты n санның қосындысы нөлге тең ($n > 2$ және сандар әртүрлі болуы міндетті емес). Осы сандардың бірнешеуін (кем дегенде біреуін) таңдаудың $2^n - 1$ әдісі бар. Әр әдістегі таңдалған сандардың қосындысын есептеп, барлық $2^n - 1$ қосындыны бір қатарға өспейтін ретпен жазып шыққан. Осы қатарда бірінші сан S-ке тең. Осы қатардағы екінші санның ең кіші мүмкін мәні нешеге тең?

Жауабы. $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Шешуі. Барлық берілген сандарды өсу ретімен төмендегідей жазып шығайық:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m < 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k,$$

бұл жерде $m + k = n$. Қатарда жазылған ең үлкен сан барлық оң сандардың қосындысына тең болатыны анық, яғни $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = -a_1 - a_2 - \ldots - a_m$, ал келесі үлкен санды алу үшін S-тен немесе ең кіші оң b_1 санын азайту керек, немесе ең үлкен теріс a_m санын қосу керек. $c = \min\{b_1, |a_m|\}$ деп белгілейік. Сонда, бір жағынан, $S \geq kb_1 \geq kc$, ал екінші жағынан $S \geq m|a_m| \geq mc$. m және k сандарының кемінде біреуі $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ санынан кем емес, демек $c \leq \min\{\frac{S}{k}, \frac{S}{m}\} \leq \frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ бағалауы дұрыс. Сондықтан іздеп отырған екінші сан $S - c \geq S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ санынан кем емес.

Мысал. Екінші сан $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ санына тең бола алады, мысалға, егер бастапқыда берілген $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ сан $\frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ санына тең болса, ал қалған $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ сан $-\frac{S}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ санына тең болса, $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ бағалауы жетіледі.

Бағалау схемасы

«Жауап және мысал» және «Баға» бөлімдерінің әрқайсысындағы ұпайлар қосылмайды. Қорытынды балл әрбір бөлімнің ең жоғары ұпайларының қосындысына тең.

Жауап және мысал.

- Дұрыс жауап .... **0 ұпай**
- Екінші сан $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ санына тең болған жағдайға мысал .... **0 ұпай**

1. $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ саны n санымен бірдей жұпты болғандағы жағдайға мысал .... **1 ұпай**
2. Барлық n үшін екінші сан $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ санына тең болғандағы жағдайға мысал .... **2 ұпай**

Бағалау.

- Кез келген шекті сандар жиыны үшін алынған дұрыс бағалау n .... **0 ұпай**

3. Бірдей жұпты n сандары үшін алынған дұрыс бағалау .... **3 ұпай**
4. Барлық n сандары үшін алынған дұрыс бағалау .... **5 ұпай**

№5. Егер натурал санды $ax^2+bxy+cy^2$ түрінде келтіруге болса, бұл жерде a, b, c, x, y — бүтін сандар және $b^2-4ac=-20$, сол санды *жақсы* сан деп айтамыз. Екі жақсы санның көбейтіндісі де жақсы сан болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Тұжырым. n саны сонда, және тек сонда ғана жақсы болады, егер оның жай сандарға жіктеуінде тақ дәрежеде тұрған тек жай p сандары үшін $x^2 \equiv -5 \pmod p$ шешімі табылса.
Дәлелдеуі. $n=ax^2+bxy+cy^2$, $d=(x,y)$, $x=dx'$, $y=dy'$, $(x',y')=1$ болсын. Онда $n=d^2n'$ және n' жай сандарға жіктелуінде тақ дәрежеде кездесетін жай сандар n санында да кездеседі . Осындай жай p санын қарастырайық. x' және y' сандарының кемінде біреуі p-ға бөлінбейді; ол y' болсын. Онда $an'=(ax'+by')^2+5y'2$, яғни $(ax'+by')^2 \equiv -5y'2 \pmod p$. $y' \not\equiv 0 \pmod p$ болғандықтан, $ax'+by' \equiv \alpha y' \pmod p$ болатындай α саны табылады. Осы α үшін $\alpha^2 \equiv -5 \pmod p$. Осылайша, біз айтылған критерийге n саны қанағаттандыратынын көрсеттік.

Керісінше, n-ге кіретін тақ дәрежелі барлық p сандары үшін $x^2 \equiv -5 \pmod p$ шешімі болсын. Егер $n'=p_1\dots p_k$ болса, онда о $n=d^2n'$ қандай да бір d саны үшін. Барлық $x^2 \equiv -5 \pmod p)_i$ салыстырулар шешімі бар болғандықтан, Қалдықтар теоремасы бойыншы $x^2 \equiv -5 \pmod n)'$ салыстырылымың да шешімі бар. b саны осы салыстырылым шешімі болсын. Ол деген сөз $b^2-n'c=-5$ (кейбір бүтін c саны үшін). Сонда $n=n'd^2+bd\cdot 0+c\cdot 0^2$ – жақсы сан. Бұл біздің дәлелдеуді аяқтайды.

Бағалау схемасы

Жалпы ұпайлар

(0.1) $(x^2+5y^2)(z^2+5t^2)=(xz-5yt)^2+5(xt+yz)^2$ теңдігі үшін: .... **0 ұпай**

(0.2) Есеп екі $ax^2+bxy+cy^2$ түрдегі, бірақ ортақ a-сы бар сан үшін шешілсе: .... **2 ұпай** (басқаларымен қосылмайды)

Берілген шешім үшін бағалау

(3.1) Егер $ax^2+bxy+cy^2 \vdots p$, ал $x, y \not\vdots p$ болса, онда -5 саны $\bmod p$ бойынша квадраттық қалынды екені көрсетілсе: .... **1 ұпай**

(3.2) -5 саны $\bmod p$ бойынша квадраттық қалынды болатын және құрамында тек p саны бар барлық жақсы сандар үшін дәлелденсе .... **3 ұпай**

Барлық ұпайлар бір-бірімен қосылады

№6. Түсі жасыл немесе көк болатын, тіктөртбұрыш пішінді бірнеше майлық бар (олардың өлшемдері әртүрлі болуы мүмкін). Олардың әрбірін қабырғалары көлденең және тігінен келетіндей жазықтыққа қойып шыққан. Түрлі түсті кез келген екі майлықты тік немесе көлденең сызықпен (мүмкін, шекара бойымен) қиып өтуге болатыны белгілі. Келесі шартты қанағаттандыратын бір түс таңдап алуға болатынын дәлелдеңіз: екі көлденең және бір тік түзуді таңдауға болады және таңдап алған түстің барлық майлықтарын осы таңдаған үш түзудің кемінде біреуі қияды.

Шешуі. Белгілеулер. OX және OY өстеріне ортогональ проекциялау операцияларын, сәйкесінше, π_X және π_Y деп белгілейміз. $B_1, \ldots, B_k$ майлықтары үшін олардың барлығын кесетін және OY өсіне параллель түзуі сонда, және тек сонда ғана табылады, егер барлық $\pi_X(B_1), \ldots, \pi_X(B_k)$ кесінділерінің ортақ нүктесі табылса. Енді осындай ортақ нүктесі бар жағдайды *түйреу* деп атайтын боламыз (ал майлықтар үшін *түзумен түреу* деп атаймыз).

Бір түзудегі екі ℓ_1 және ℓ_2 кесінділері үшін олардың *қабығы* деп ℓ_1-ді де, ℓ_2-ні де қамтитын ең кіші кесінді айтамыз (ал оны $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ арқылы белгілейміз). Басқа сөзбен айтқанда, $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ – ол ℓ_1 және ℓ_2 кесіндісінің бірігуі болады, егер олар қиылысса, және ℓ_1, ℓ_2 және олардың арасындағы интервалдың бірігуі болады, егер олар қиылыспаса.

Бізге келесі лемма қажет болады.

Лемма 1 (бірөлшемді Хелли теоремасы). Егер түзудегі кесінділердің шекті тобында кез келген екі кесінді қиылысса, онда олардың барлығын түйрейтін нүкте табылады.

Дәлелдеуі. Оң жақ шеті ең сол орналасқан $\ell_1 = [a, b]$, және сол жақ шеті оң оң жақта орналасқан $\ell_2 = [c, d]$ кесіндісін қарастырайық. Олар қиылысады деген $b \geqslant c$ теңсіздігін білдіреді. Онда кез келген кесіндінің оң шетінің орналасуы b-ның сол жағында емес, ал сол шетінің орналасуы c-ның оң жағында емес. Демек барлық кесінділердін $[c, b]$ кесіндісінде нүктесі бар. □

Есеп шешіміне көшейік.

Егер топтағы барлық майлықтарды бір көлденең сызықпен түйіп өте алсақ, біз майлықтардың отбасын *жақсы*, ал кері жағдайда *жаман* деп атаймыз. Лемма 1 бойынша жаман отбасында OY осіне проекциялары қиылыспайтын екі майлық бар.

Әрбір тік ℓ сызығына қатысты барлық майлықтар үш түрге бөлінеді: онымен тесілген, қатаң сол жақта жататын және қатаң оң жақта жатқан; мұндай майлықтардың жиынтықтарын, сәйкесінше, $I(\ell)$, $L(\ell)$ және $R(\ell)$ деп белгілейміз. Егер кейбір түс үшін (анықтылық үшін, көк) кейбір ℓ жолында екі топтың екеуі де — $L(\ell)$ ішіндегі көк майлықтардан және $R(\ell)$ ішіндегі көк майлықтардан тұратын болса, — жақсы болып шықты, содан кейін есеп шешілді: қажетті үш жол ℓ бірге аталған екі отбасының барлық майлықтарын тесіп өтетін екі жол. Мұндай ℓ тікелей сызығы жоқ деп есептейік.

Ең оң орналасқан ℓ_0 түзуін қарастырайық, ол үшін $L(\ell_0)$ ішіндегі көк те, және жасыл майлықтар тобы жақсы болатындай. ℓ_0 ең оң жақта болуы оны кейбір түстер үшін оңға жылжытқанда (көк үшін анықтық үшін) сол жағында осы түсті екі майлық (қатаң емес) жатқанын білдіреді. OY осіндегі проекциялары қиылыспайтын ℓ_0. Осы майлықтарды W_1 және W_2 деп белгілейік, нақтылық үшін W_1 проекциясы OY осіне W_2 проекциясынан жоғары болсын. Бірақ ℓ_0 түзу сызығы туралы болжамымыз $R(\ell_0)$ ішіндегі жасыл майлықтардың отбасы нашар екенін білдіреді. Содан кейін B_1 және B_2 екі жасыл майлықтар ℓ_0 оң жағында орналасқан, олардың OY осіне проекциялары қиылыспайды. Анық болу үшін B_1 проекциясы OY проекциясы B_2 проекциясынан жоғары болсын. Тағы да, жалпылықты жоғалтпай, B_1 төменгі шегі W_1 төменгі шегінен жоғары болмасын. Содан кейін W_1 және B_2 майлықтарды көлденең немесе тік сызықпен бір уақытта тесу мүмкін емес - бұл шартқа қайшы.

Бағалау схемасы

(0.1) Кез келген жеке жағдайларды қарастыру, сондай-ақ (ішінара) дұрыс емес дәлелдеу .... **0 ұпай**

(0.2) Бастапқы қадамдар, мысалы, осьтердегі проекциялар тұрғысынан мәселені қайта тұжырымдау, 1 Лемманы айту және дәлелдеу және т.б. .... **0 ұпай**

(1.1) ℓ тік сызықты екі көлденең сызықпен толықтыруға болады деп шешімде пайдаланылатын жеткілікті шарт сипатталған, осылайша осы үш жол бірдей түсті барлық майлықтарды тесіп өтеді деген тұжырым. .... **1 ұпай**

(1.2) Шешімде (1.1) пункті бар болған жағдайда: егер шектік принцип қолданылып (шешімдегідей), немесе ℓ түзуінің қозғалуында (солдан оңға қарай) ℓ_0 түзуі таңдалып алсынса . . . . **2 ұпай**

№4. Сумма $n > 2$ ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных) равна нулю. Для каждого из $2^n - 1$ способов выбрать несколько (не менее одного) из этих чисел подсчитали сумму выбранных чисел и все полученные $2^n - 1$ сумм выписали в строку в невозрастающем порядке. Первое число в строке равно S. Найдите наименьшее возможное значение второго числа в строке.

Ответ: $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Решение. Занумеруем все заданные числа в порядке возрастания следующим образом:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m < 0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_k,$$

где $m + k = n$. Очевидно, что наибольшее число, записанное в строку, равно сумме всех положительных чисел, т. е. $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = -a_1 - a_2 - \ldots - a_m$, а следующее получается из S либо вычитанием наименьшего положительного числа b_1, либо прибавлением наибольшего отрицательного числа a_m. Обозначим $c = \min\{b_1, |a_m|\}$, тогда, с одной стороны, $S \ge kb_1 \ge kc$, а с другой, $S \ge m|a_m| \ge mc$. По крайней мере одно из чисел m и k не меньше, чем $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, значит, верна оценка $c \le \min\{\frac{S}{k}, \frac{S}{m}\} \le \frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Соответственно, второе число в строке не может быть меньше, чем $S - c \ge S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$.

Второе число в строке может равняться $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, например, если изначально были заданы $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ чисел, равных $\frac{S}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чисел, равных $-\frac{S}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Схема оценивания.

Баллы внутри каждого из разделов „Ответ и пример” и „Оценка” не суммируются. Итоговая оценка равна сумме наибольших баллов каждого из разделов.

Ответ и пример.

- Верный ответ .... **0 баллов**
- Любое конечное количество примеров, в которых второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ .... **0 баллов**

1. Пример, в котором второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ для одной чётности n .... **1 балл**
2. Пример, в котором второе число равно $S(1 - \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ всех n .... **2 балла**

Оценка.

- Верная оценка, полученная для любого конечного набора чисел n .... **0 баллов**

3. Верная оценка, полученная для всех чисел n одной чётности .... **3 балла**
4. Верная оценка, полученная для всех n .... **5 баллов**

№5. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представляется в виде $ax^2 + bxy + cy^2$, где a, b, c, x, y – целые числа и $b^2 - 4ac = -20$. Докажите, что произведение двух хороших чисел – тоже хорошее число.

Решение. Заметим, что хорошее число – это число вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $b^2 - ac = 5$.

Предложение. Число n хорошее тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители в нечётных степенях входят лишь простые p, для которых разрешимо сравнение $x^2 \equiv -5 \pmod p$.

Доказательство. Пусть $n = ax^2 + bxy + cy^2$, $d = (x, y)$, $x = dx'$, $y = dy'$, $(x', y') = 1$. Тогда $n = d^2n'$, и разложение n' на простые множители содержит в нечётных степенях те же числа, что и n. Рассмотрим одно такое простое p. Хотя бы одно из чисел x' и y' не кратно p; пусть это y'. Имеем $an' = (ax' + by')^2 + 5y'2$, то есть $(ax' + by')^2 \equiv -5y'2 \pmod p$. Поскольку $y' \not\equiv 0 \pmod p$, существует целое α, для которого $ax' + by' \equiv \alpha y' \pmod p$. Для этого α имеем $\alpha^2 \equiv -5 \pmod p$. Таким образом, мы доказали, что n удовлетворяет сформулированному критерию.

Обратно, пусть все простые p, входящие в n с нечётным показателем, таковы, что разрешимо сравнение $x^2 \equiv -5 \pmod p$. Если $n' = p_1 \dots p_k$ – произведение всех таких простых, то $n = d^2n'$ при некотором целом d. Поскольку разрешимы все сравнения $x^2 \equiv -5 \pmod p)_i$, по китайской теореме об остатках разрешимо и сравнение $x^2 \equiv -5 \pmod n)'$. Пусть b – решение этого сравнения. Это значит, что $b^2 - n'c = -5$ для некоторого целого c. А тогда $n = n'd^2 + bd \cdot 0 + c \cdot 0^2$ – хорошее число. Это завершает доказательство предложения.

Для решения задачи осталось заметить, что произведение двух чисел вида, описанного в предложении, тоже имеет такой вид.

Схема оценивания

Общие баллы

(0.1) Тождество $(x^2 + 5y^2)(z^2 + 5t^2) = (xz - 5yt)^2 + 5(xt + yz)^2$: ....**0 баллов**

(0.2) Утверждение доказано для двух хороших чисел вида $ax^2 + bxy + cy^2$ с одинаковыми a: **2 балла**
(не суммируется с остальными)

Схема для данного решения

(3.1) Доказано, что если $ax^2 + bxy + cy^2$ делится на p, а x и y не делятся, то -5 — квадратичный вычет mod$p$: .... **1 балл**

(3.2) Доказано, что хороши все числа, содержащие только простые p, для которых -5 — квадратичный вычет ....**3 балла**

Все баллы из схемы третьего решения суммируются.

Баллы из схем оценивания разных решений не суммируются.

№6. На плоскость положили несколько синих и зелёных прямоугольных салфеток (возможно, разных размеров) с вертикальными и горизонтальными сторонами. Оказалось, что любые две салфетки разного цвета можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой (возможно, по границе). Докажите, что можно выбрать цвет, две горизонтальных прямых и одну вертикальную прямую так, что каждую салфетку выбранного цвета пересекает хотя бы одна из выбранных прямых.

Решение. Обозначения. Операции ортогональной проекции на оси OX и OY обозначим π_X соответственно π_Y. Очевидно, для салфеток $B_1, \ldots, B_k$ найдется пересекающая их все прямая, параллельная OY, тогда и только тогда, когда отрезки $\pi_X(B_1), \ldots, \pi_X(B_k)$ содержат общую точку; далее для краткости говорим *протыкаются* точкой (а для салфеток *протыкаются* прямой).

Для двух отрезков ℓ_1 и ℓ_2 на прямой их *оболочкой* $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ будем называть наименьший отрезок, содержащий ℓ_1 и ℓ_2. Иными словами, $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ – объединение ℓ_1 и ℓ_2 если они пересекаются, объединение ℓ_1, ℓ_2 и интервала между ними, если ℓ_1 и ℓ_2 не пересекаются.

Нам понадобится

Лемма 1 (одномерная теорема Хелли). Если в (конечном) семействе отрезков на прямой любые два отрезка пересекаются, то существует точка, протыкающая все отрезки.

Вообще говоря, теорема верна и без условия конечности, но мы сейчас не будем заниматься этими тонкостями.

Доказательство. Рассмотрим отрезок с самым левым правым концом $\ell_1 = [a, b]$ и самым правым левым концом $\ell_2 = [c, d]$. То что они пересекаются означает, в частности, что $b \geqslant c$. Но тогда любой отрезок имеет правый конец не левее b и левый конец не правее c, то есть содержит все точки из отрезка $[c, b]$ (возможно, вырожденного в точку, но не пустого). $\square$

Вернемся к решению задачи.

Будем называть семейство салфеток *хорошим*, если все салфетки в семействе протыкаются одной горизонтальной прямой, и *плохим* в противном случае. По Лемме 1, плохое семейство содержит две салфетки, проекции которых на ось OY не пересекаются.

Относительно каждой вертикальной прямой ℓ все салфетки делятся на три типа: проткнутые ею, лежащие строго левее, и лежащие строго правее; обозначим множества таких салфеток через $I(\ell)$, $L(\ell)$ и $R(\ell)$ соответственно. Если для какого-то цвета (для определенности – синего) для некоторой прямой ℓ оба семейства — состоящее из синих салфеток в $L(\ell)$, и состоящее из синих салфеток в $R(\ell)$, — оказались хорошими, то задача решена: требуемые три прямые — это ℓ вместе с двумя прямыми, протыкающими все салфетки упомянутых двух семейств. Предположим, что такой прямой ℓ не нашлось.

Рассмотрим самую правую прямую ℓ_0, для которой как семейство синих, так и семейство зелёных салфеток в $L(\ell_0)$ – хорошие. То что ℓ_0 самая правая, означает, что при ее сдвиге вправо для какого-то из цветов (пусть для определенности для синего) есть две салфетки этого цвета, лежащих (нестрого) левее ℓ_0, чьи проекции на ось OY не пересекаются. Обозначим эти салфетки W_1 и W_2, пусть для определенности проекция W_1 на ось OY выше, чем проекция W_2. Но наше предположение о прямой ℓ_0 означает, что семейство зелёных салфеток в $R(\ell_0)$ – плохое. Тогда есть две зелёных салфетки B_1 и B_2, лежащие строго правее ℓ_0, проекции которых на ось OY не пересекаются. Пусть для определенности проекция B_1 на OY выше проекции B_2. Опять же, не умаляя общности, пусть нижняя граница B_1 не выше нижней границы W_1. Тогда салфетки W_1 и B_2 нельзя проткнуть одновременно ни горизонтальной ни вертикальной прямой – противоречие с условием.

Схема оценивания

(0.1) Рассмотрения любых частных случаев, равно как и (частично) неверные рассуждения .... **0 баллов**

(0.2) Начальные шаги, такие как переформулировка задачи в терминах проекций на оси, формулировка и доказательство Леммы 1 и т.п. .... **0 баллов**

Схема для данного решения

(1.1) Описано (использованное в решении) достаточное условие того, что вертикальную прямую ℓ можно дополнить двумя горизонтальными так, чтобы эти три прямых протыкали все салфетки одного цвета .... **1 балл**

(1.2) При наличии пункта (1.1): с использованием принципа крайнего (как в решении), либо же при помощи движения прямой ℓ слева направо выбрана прямая ℓ_0, подходящая под требования решения 2 .... **2 балла**