№1. Pete has a deck of 1001 cards; the numbers $1, 2, \ldots, 1001$ are written on those cards with a blue pen, one number per card. Pete arranged the cards in a circle, with the blue numbers on their bottom sides. Then, for each card C, Pete considered 500 cards following C in the clockwise order and counted the number $f(C)$ of those whose blue numbers are larger than the blue number on C. Pete wrote the number $f(C)$ on the top side of C with a red pen. Prove that Basil, who sees all the red numbers on the cards, can determine the blue number on each card.

Solution. In both solutions, we denote $k = 500$ and $n = 2k + 1 = 1001$.

Suppose, for the sake of contradiction, that there exist two arrangements of Pete's cards which result in the same arrangement of red numbers. Let those arrangements be $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (in each string, we list the blue numbers in the clockwise order, starting from a fixed position).

Put $\mathcal{I} = \{i \colon a_i \neq b_i\}$; by our assumption, $\mathcal{I} \neq \varnothing$. Notice that the sets $N_A = \{a_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ and $N_B = \{b_i \colon i \in \mathcal{I}\}$ coincide. Let a be the smallest element in N_A; then $a = a_i = b_j$ for some $i, j \in \mathcal{I}$ with $i \neq j$. Notice here that $a_i < b_i$ and $b_j < a_j$. Shifting the numeration (and, perhaps, swapping the two arrangements), we may assume that $i = 1$ and $j \leq k + 1$.

Consider now the red number at position 1. It should be equal to k minus the cardinality of each of the sets

$$A_1 = \{s \colon 2 \leq s \leq k+1 \quad \text{and} \quad a_s < a_1\} \quad \text{and} \quad B_1 = \{s \colon 2 \leq s \leq k+1 \quad \text{and} \quad b_s < b_1\}.$$

However, if $s \in A_1$, then $a = a_1 > a_s$; by definition of a, we get $b_s = a_s < a_1 < b_1$ and hence $s \in B_1$. Thus, $A_1 \subseteq B_1$. On the other hand, we have $j \in B_1$ (since $b_j = a < b_1$) and $j \notin A_1$ (since $a_j > a = a_1$), so the inclusion is strict. Hence $|A_1| < |B_1|$. A contradiction.

Marking scheme

(0) Only very initial observations and steps .... **0 points**

Examples of such observations and steps:

(a) A proof that, among two cards, one is in the neighborhood of the other;

(b) Just considering two blue arrangements providing the same collection of red numbers.

(c) Noticing, as in the above Remark, that Basil also knows the number of cards in the neighborhood of C whose blue numbers are smaller than that on C.

Scheme for current solution

(1.1) Focusing on the number a from Solution 1, i.e., the minimal (or maximal) number by which the two blue arrangements differ .... **1 point**

(1.2) One fails (or forgets) to show that the inclusion $A_1 \subset B_1$ is strict, but uses this result **at most 5 points**

№2. Let Ω be the circumcircle of a scalene triangle ABC. The line tangent at C to the circumcircle of triangle ABC meets the line AB at point D. A line passing through D intersects the segments AC and BC at K and L, respectively. Points M and N are chosen on the segment AB so that $AC \parallel NL$ and $BC \parallel KM$. Let NL and KM intersect at point P inside the triangle ABC. The line CP meets the circumcircle ω of MNP again at Q. Prove that the line DQ is tangent to ω.

Solution. Since $AC \parallel NL$ and $BC \parallel KM$, we get

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM},$$

which yields $DM \cdot DN = DA \cdot DB$. So the powers of D with respect to Ω and ω are equal. Denote by R the intersection point of the line CD and the line tangent to ω at Q, then

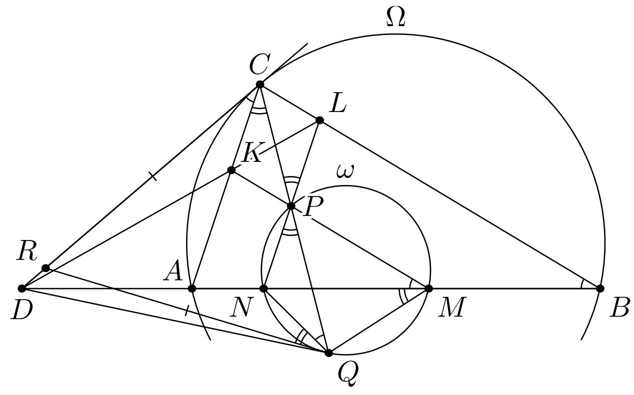

Figure 1

$$\angle RQP = \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \angle QPN + \angle DBC = \angle CPL + \angle DCA = = \angle KCP + \angle DCA = \angle RCQ.$$

Hence $RC = RQ$ which implies than R and D both lie on the radical axis of Ω and ω. But this radical axis cannot be the line RD since otherwise it would pass through the point C which lies on Ω but outside ω. Therefore points R and D must coincide.

Marking scheme

Common points.

0. Proof that the powers of D with respect to Ω and ω are equal: .... **2 points**

Scheme for current solution

1. Proof that the triangle RQC is isosceles .... **3 points**

For an incomplete computational solution (Cartesian or complex coordinates, vector or trigonometry calculus, etc.) points can only be awarded if the partial results of computations have been formulated in an equivalent form of the geometric statements mentioned in the scheme above.

№3. Given positive integers a_1, a_2, …, a_k. Let $S(n)$ denote the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in nonnegative integers x_1, x_2, …, x_k. It is known that $S(n) \neq 0$ for all large enough n. Prove that $S(n+1) < 2S(n)$ for all large enough n.

Solution.

Lemma 1. The number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in non-negative integers does not exceed $(n+1)^{k-1}$.

Proof. For a given n each solution $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ is uniquely determined by the sequence $(x_2, x_3, \dots, x_k)$. Since $0 \leqslant x_i \leq n$, the number of such sequences does not exceed $(n+1)^{k-1}$.

Lemma 2. If the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ admits a solution in non-negative integers for all large enough n, then for all large enough n the number of such solutions is at least cn^{k-1}, where c is positive real number not depending on n.

Proof. Since the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ is solvable in integers, the congruence $a_2x_2 + \dots + a_kx_k \equiv n \pmod{a_1}$ is also solvable; let $(t_2, \dots, t_k)$ be a soluton of this congruence.

The number of ways to choose a number $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ not exceeding a given M is at least $[\frac{M}{a_1}]$. Therefore there are at least $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \dots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$ sequences $(x_2, x_3, \dots, x_k)$ of non-negative integers satisfying $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ and $a_ix_i \leqslant \frac{n}{k}$ for $2 \leqslant i \leqslant k$. For each such sequence the number $n - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_kx_k \geq n - \frac{(k-1)n}{k}$ is non-negative and divisible by a_1, that is, each such sequence may be expanded to a solution $(x_1, \dots, x_k)$. Thus the number of solutions in question is at least $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \dots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$, and the lemma follows imediately.

Back to the solution of the problem, there exist for some integer n sequences $(r_1, \dots, r_k)$ and $(s_1, \dots, s_k)$ such that $a_1r_1 + \dots + a_kr_k = n$ and $a_1s_1 + \dots + a_ks_k = n+1$. Then the numbers $v_i = s_i - r_i$ satisfy $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 1$. For each n, to each solution $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ in non-negative integers we assign the solution $(x_1 - v_1, \dots, x_k - v_k)$ of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n$ in integers. If $x_i \geqslant v_i$ for all i, the numbers $x_i - v_i$ are also non-negative. Therefore the difference $S(n+1) - S(n)$ does not exceed the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ where at least one of x_i is less than the respective v_i. For each i the number of such values of x_i is finite; for every such value $x_i = j$ the number of solutions of the equation $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n+1$ with $x_i = j$, that is, $a_1x_1 + \dots + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_{i+1} + \dots + a_kx_k = n + 1 - ja_i$, does not exceed $(n + 2 - ja_i)^{k-2} \leqslant (n+2)^{k-2}$ by Lemma 1. Accordingly, the entire difference $S(n+1) - S(n)$ does not exceed $A(n+2)^{k-2}$ with some constant A. But $S(n)$ itself is, by Lemma 2, at least Cn^{k-1} for some positive C. It remains to note that $A(n+2)^{k-2} < Cn^{k-1}$ for all large enough n.

It follows from this solution that the factor 2 in the problem can be replaced by $1 + \varepsilon$ with any $\varepsilon > 0$.

Marking scheme

General

(0.1) The problem is solved for a_i pairwise coprime: .... **1 point**
(not additive)

Scheme for current solution

(1.1) Lemma 1: .... **1 point**
(additive with either of items (1.2), (1.3), (1.4))

(1.2) Lemma 2: .... **2 points**

(1.3) The correspondence between the solutions (x_i) and $(x_i - v_i)$ for two values of the RHS differing by 1: .... **1 point**

(1.4) (1.2) together with (1.3): .... **4 points**

№1. Петя көк қаламмен $1, 2, \ldots, 1001$ сандарын 1001 картаға жазып шықты (әрбір картада дәл бір сан жазылған). Сосын ол карталарды көк сандарымен төмен қаратып, шеңбер бойына қандай да бір ретпен қойып шықты. Кейін ол әрбір C картасы үшін, C-дан кейін сағат тілі бағытымен орналасқан 500 карталарды қарастырып, сол 500 карталардағы көк сандардың қаншасы C картасында жазылған көк саннан артық екенін санап, сол санды $f(C)$ деп белгіледі. Петя қызыл қаламмен әр C картасының жоғарғы жағына $f(C)$ санын жазды. Вася барлық қызыл сандарды көріп, қай картада қай көк сан жазылғанын қалпына келтіре алатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Төмендегі шешімдерде біз белгілеулерді қолданамыз: $k = 500$ және $n = 2k + 1 = 1001$.

Шешуі. Есептегі дәлелдеу керек шарт жалған делік; бұл көк сандардың кейбір екі орналасуы үшін қызыл сандардың бірдей орналасуы екендігін білдіреді. Осы көк орналасулар ол $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ және $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ болсын (әрбір жағдайда көк сандар қандай да белгілі орыннан бастап сағат тілімен көрсетілген).

$\mathcal{I} = \{i\colon a_i \neq b_i\}$ болсын; біздің тұжырым бойынша $\mathcal{I} \neq \varnothing$. $N_A = \{a_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ және $N_B = \{b_i\colon i \in \in \mathcal{I}\}$ жиындары беттеседі. N_A жиынында ең кіші элемент a болсын; онда кейбір $i, j \in \mathcal{I}$ үшін $a = a_i = b_j$, әрі $i \neq j$. $a_i < b_i$ және $b_j < a_j$ екенін байқайық. Нөмірлерді қозғай отырып (мүмкін орындарымен ауыстыра отырып), $i = 1$ және $j \leqslant k + 1$ деп есептесек болады.

Енді 1 позициясындағы қызыл санды қарастырайық. Ол әр

$$A_1 = \{s\colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad a_s < a_1\} \quad \text{и} \quad B_1 = \{s\colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad b_s < b_1\}.$$

жиынның элементтер саны үшін, k азайту осы элементтер санына тең. Бірақ та, егер $s \in A_1$ болса, онда $a = a_1 > a_s$; осыдан, a санының анықтамасы бойынша, $b_s = a_s < a_1 < b_1$ екені шығады, ол деген сөз $s \in B_1$. Осылайша, $A_1 \subseteq B_1$. Екінші жағынан $j \in B_1$ (өйткені $b_j = a < b_1$) және $j \notin A_1$ (өйткені $a_j > a = a_1$), сондықтан $A_1 \subset B_1$ енуі қатаң түрде болады. Сонымен, $|A_1| < |B_1|$, ол мүмкін емес.

Бағалау схемасы

(0) Есеп шешуде тек бастапқы қадамдар жасалса .... **0 ұпай**

Бастапқы қадамдар мысалдары:

(a) Кез келген екі картаның бірі екіншісінің маңайында орналасқанын дәлелдеу.

(b) Қызыл сандардың бірдей орналасуын беретін көк сандардың екі гипотетикалық орналасуын ғана қарастыру.

(c) Васяның C маңындағы карталардың санын білетінін ескерген, олардағы көк сандар C-дағы саннан аз.

Берілген шешімге бағалау схемасы

(1.1) a санын шешімнен зерттеп, яғни көк сандардың екі орналасуы ерекшеленетін ең кіші (немесе ең үлкен) санды қарастыру .... **1 ұпай**

(1.2) Келесі қатемен дәлелденген (немесе дәлелденбеген) факт үшін: $A_1 \subset B_1$ қатаң түрде, бірақ есепт шешуінде қолданылған .... **5 ұпайдан артық емес**

№2. Теңбүйірлі емес ABC үшбұрышына сырттай сызылған Ω шеңберге C нүктесінде жүргізілген жанама түзу AB түзуін D нүктесінде қияды. D арқылы өтететін түзу AC және BC қабырғаларын, сәйкесінше, K және L нүктелерінде қияды. AB қабырғасынан $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$ болатындай M және N нүктелері белгіленген. NL және KM түзулері P нүктесінде қиылысады (P $\triangle ABC$-ның ішінде жатыр). CP түзуі MNP үшбұрышына сырттай сызылған ω шеңберін екінші рет Q нүктесінде қияды. DQ түзуі ω-ны жанайтынын дәлелдеңіз.

Шешуі. $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$ параллельдігінен

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM}$$

екені шығады, демек $DM \cdot DN = DA \cdot DB$, сондықтан D нүктесінің ω және Ω-ға қатысты дәрежесі тең.

R арқылы CD түзуі мен ω-ға Q нүктесінде жүргізілген жанаманың қиылысу нүктесін белгілейік, сонда

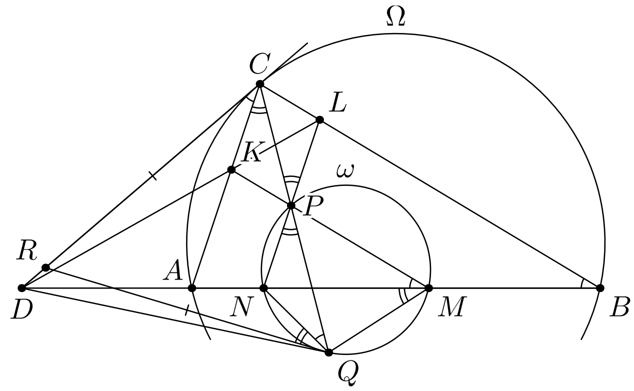

Рис. 1

$$\begin{aligned}\angle RQP = \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \\ = \angle QPN + \angle DBC = \angle CPL + \angle DCA = \\ = \angle KCP + \angle DCA = \angle RCQ.\end{aligned}$$

Демек, $RC = RQ$, ол R және D нүктелерінің екеуі де Ω және ω шеңберлерінің радикаль өсінде жатқанын білдіреді. Бірақ осы радикаль өсь RD түзуі емес, өйткені кері жағдайда ол C нүктесі арқылы өте тұра, Ω-ны жанап, бірақ ω-ның сыртында жатушы еді. Демек, R және D нүктелері беттеседі.

Бағалау схемасы

Жалпы ұпайлар

0. D нүктесінің Ω және ω-ға қатысты дәрежесі тең екені көрсетілсе: .... **2 ұпай**

1. $\triangle RQC$ теңбүйірлі екенін көрсетсе: .... **3 ұпай**

Аяқталмаған есептеу шешімі (координаталар, күрделі сандар, векторлар, тригонометриялық және т.б.) үшін аралық есептеулердің нәтижелері балльдық сызбада көрсетілген эквивалентті геометриялық мәлімдемелер түрінде тұжырымдалған жағдайда ғана ұпай алуға болады.

№3. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ натурал сандары берілген. $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$ теңдеуінің теріс емес бүтін сандар жиынындағы шешімдер санын $S(n)$ деп белгілейік. Барлық жеткілікті үлкен n сандары үшін $S(n)\neq 0$ екені белгілі. Барлық жеткілікті үлкен n сандары үшін $S(n+1)<2S(n)$ екенін дәлелде.

Шешуі.
Лемма 1. $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$ теңдеуінің теріс емес бүтін сандар жиынындағы шешімдер саны $(n+1)^{k-1}$ санынан аспайды.
Дәлелдеуі. Берілген n саны үшін $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)$ шешуі сөзсіз түрде $(x_2,x_3,\ldots,x_k)$ жиынымен беріледі. Бірақ $0\leqslant x_i\leq n$, сондықтан осындай жиындар саны $(n+1)^{k-1}$ санынан аспайды.
Лемма 2. Егер $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$ теңдеуінің барлық жеткілікті үлкен n үшін теріс емес бүтін сандар жиынындағы шешімі болса, онда осындай барлық жеткілікті үлкен n шешімдер саны cn^{k-1} санынан кем емес, бұл жерде c саны n-ге тәуелсіз оң сан.
Дәлелдеуі. $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$ теңдеуінің бүтін шешімдері болғандықтан, $a_2x_2+\cdots+a_kx_k\equiv n \pmod{a_1}$ салыстыруының да шешімі бар; ол $(t_2,\ldots,t_k)$ шешімі болсын.

M-нен аспайтын теріс емес бүтін сандар ішінен $x_i\equiv t_i \pmod{a_1}$ болатындай x_i сандарын кемінде $[\frac{M}{a_1}]$ әдіспен таңдап алсақ болады. Сондықтан $(x_2,x_3,\ldots,x_k)$ теріс емес бүтін сандар жиынының саны кемінде $[\frac{n}{ka_1a_2}]\cdot\cdots\cdot[\frac{n}{ka_1a_k}]$, бұл жерде $x_i\equiv t_i \pmod{a_1}$ және $a_ix_i\leqslant\frac{n}{k}$ $2\leqslant i\leqslant k$ болған жағдайда. Барлық осындай жиындар үшін $n-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_kx_k\geq n-\frac{(k-1)n}{k}$ саны теріс емес және a_1 санына бөлінеді, яғни әр осындай жиынды қандай да бір $(x_1,\ldots,x_k)$ шешіміне дейін толықтырсақ болады. Осылайша, теңдеудің шешімдер кем дегенде $[\frac{n}{ka_1a_2}]\cdot\cdots\cdot[\frac{n}{ka_1a_k}]$, осыдан лемма тұжырымы шығады.

Есеп шешіміне көшейік. Есеп шарты бойынша кейбір натурал n үшін $a_1r_1+\cdots+a_kr_k=n$ және $a_1s_1+\cdots+a_ks_k=n+1$ болатындай $(r_1,\ldots,r_k)$ және $(s_1,\ldots,s_k)$ жиындары табылады. Теңдеулерді бір-бірінен азайтып, $v_i=s_i-r_i$ сандарының $a_1v_1+\cdots+a_kv_k=1$ теңдеуін қанағаттандыратынын байқаймыз. Әр осындай n үшін $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n+1$ теңдеуінің әр $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)$ шешімі үшін $(x_1-v_1,\ldots,x_k-v_k)$ шешімін сәйкестендіреміз. Егер барлық i үшін $x_i\geqslant v_i$ болса, x_i-v_i сандары да теріс емес болады. Осылайша, $S(n+1)-S(n)$ азайтындысы теңдеуінің $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n+1$ шешімдер санынан артық емес (бұл жерде кемінде бір x_i саны оған сәйкес v_i санынан артық емес). Әр осындай i үшін осындай x_i сандарының саны шекті; әр $x_i=j$ үшін $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n+1$ теңдеуінің $x_i=j$ болатындай шешімдер саны шекті, демек лемма-1 бойынша $a_1x_1+\cdots+a_{i-1}x_{i-1}+ + a_{i+1}x_{i+1}+\cdots+a_kx_k=n+1-ja_i$ теңдеуінің шешімдер саны $(n+2-ja_i)^{k-2}\leqslant(n+2)^{k-2}$ санынан аспайды. Сондықтан барлық $S(n+1)-S(n)$ азайтындысы қандай да бір тұрақты A саны үшін $A(n+2)^{k-2}$ санынан аспайды. Ал $S(n)$ саны лемма-2 бойынша қайсібір оң C саны үшін Cn^{k-1} санынан кіші. Енді жеткілікті үлкен n саны үшін $A(n+2)^{k-2}<Cn^{k-1}$ екенін байқау ғана қалды.

Жоғарыдағы көрсетілген шешімнен 2 көбейткішін $1+\varepsilon$ көтейткішіне ауыстыруға болатынын байқауға болады (бұл жерде $\varepsilon>0$).

Есепті бағалау схемасы

Берілген шешімге бағалау схемасы

(0.1) Есеп тек өзара жай a_i сандары үшін шешілсе: .... **1 ұпай**
(басқа пункттермен қосылмайды)

(1.1) Лемма 1: .... **1 ұпай**
(Кез келген (1.2), (1.3), (1.4) пункттермен қосылады)

(1.2) Лемма 2: .... **2 ұпай**

(1.3) (x_i) және (x_i-v_i) шешімдерінің (оң жақтағы сандардың айырмашылығы 1-ге тең кезде) сәйкестігін қарастырса:
.... **1 ұпай**

(1.4) (1.2) пункттері (1.3) пунктімен бірге: .... **4 ұпай**

№1. У Пети есть 1001 карточка, на которых написаны синей ручкой числа $1, 2, \ldots, 1001$; на каждой карточке написано ровно одно число. Петя выложил карточки по кругу синими числами вниз. Затем для каждой карточки C Петя рассмотрел 500 карточек, следующих за C по часовой стрелке, и нашёл количество $f(C)$ тех из них, на которых синие числа больше, чем синее число на C. Число $f(C)$ Петя написал на верхней стороне карточки C красной ручкой. Докажите, что Вася, видя только все красные числа, может восстановить, какое синее число на какой карточке написано.

Решение. В решениях ниже мы используем обозначения $k = 500$ и $n = 2k + 1 = 1001$.

Предположим, что утверждение задачи неверно; это значит, что для некоторых двух расположений синих чисел получается одно и то же расположение красных. Пусть эти синие расположения — это $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (в каждом случае перечислены синие числа в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с фиксированного места).

Пусть $\mathcal{I} = \{i\colon a_i \neq b_i\}$; по нашему предположению, $\mathcal{I} \neq \varnothing$. Заметим, что множества $N_A = \{a_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ и $N_B = \{b_i\colon i \in \mathcal{I}\}$ совпадают. Пусть a — наименьший элемент в N_A; тогда $a = a_i = b_j$ для некоторых $i, j \in \mathcal{I}$, причём $i \neq j$. Отметим, что $a_i < b_i$ и $b_j < a_j$. Сдвигая нумерацию и, возможно, меняя расположения местами, мы можем считать, что $i = 1$ и $j \leqslant k + 1$.

Рассмотрим теперь красное число на позиции 1. Оно должно равняться k минус мощности каждого из множеств

$$A_1 = \{s\colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad a_s < a_1\} \quad \text{и} \quad B_1 = \{s\colon 2 \leqslant s \leqslant k+1 \quad \text{и} \quad b_s < b_1\}.$$

Однако, если $s \in A_1$, то $a = a_1 > a_s$; отсюда по определению числа a получаем $b_s = a_s < a_1 < b_1$, а значит, $s \in B_1$. Таким образом, $A_1 \subseteq B_1$. С другой стороны, имеем $j \in B_1$ (поскольку $b_j = a < b_1$) и $j \notin A_1$ (поскольку $a_j > a = a_1$), так что включение $A_1 \subset B_1$ строгое. Итак, $|A_1| < |B_1|$. что невозможно.

Схема оценки

(0) Только самые начальные шаги . . . . **0 баллов**

Примеры таких начальных шагов:

(a) Доказательство того, что среди любых двух карточек одна лежит в окрестности другой.

(b) Только рассмотрение двух гипотетических расположений синих чисел, дающих одно и то же расположение красных.

(c) Замечание о том, что Вася знает количество карточек в окрестности C, синие числа на которых меньше, чем число на C.

Схема данного решения

(1.1) Исследуется число a из первого решения, т. е. наименьшее (или наибольшее) число, по которому различаются два расположения синих чисел . . . . **1 балл**

(1.2) Неверно доказан (или не доказан) факт, что включение $A_1 \subset B_1$ строгое, но этот факт используется в решении . . . . **не более 5 баллов**

№2. Касательная в точке C к окружности Ω, описанной около неравнобедренного треугольника ABC, пересекает прямую AB в точке D. Через точку D проведена прямая, пересекающая отрезки AC и BC в точках K и L соответственно. На отрезке AB отметили точки M и N так, что $AC \parallel NL$ и $BC \parallel KM$. Пусть NL и KM пересеклись в точке P, лежащей внутри треугольника ABC. Прямая CP во второй раз пересекает окружность ω, описанную около треугольника MNP, в точке Q. Докажите, что прямая DQ касается ω.

Решение. Заметим, что из параллельностей $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$ следует, что

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM},$$

то есть $DM \cdot DN = DA \cdot DB$, поэтому степень точки D относительно ω и Ω равны.

Пусть R — точка пересечения прямой CD и касательной, проведённой в точке Q к ω, тогда

$$\angle RQP = \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP = \\ = \angle QPN + \angle DBC = \angle CPL + \angle DCA = \\ = \angle KCP + \angle DCA = \angle RCQ.$$

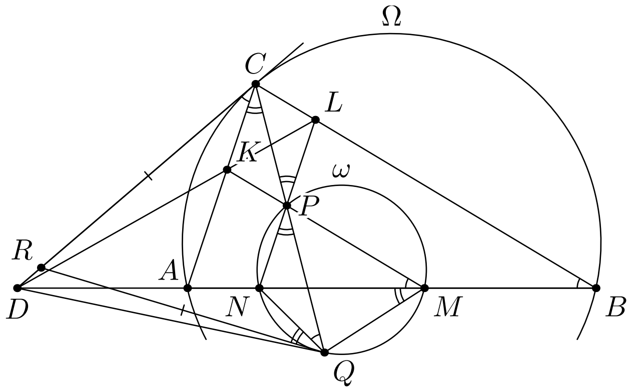

Рис. 1

Следовательно, $RC = RQ$, что означает, что точки R и D обе лежат на радикальной оси окружностей Ω и ω. Однако эта радикальная ось не может являться прямой RD, иначе она бы проходила через точку C, которая лежит на Ω, но снаружи ω. Следовательно, точки R и D совпадают.

Схема оценивания.

Общие баллы.

0. Доказано, что степень точки D относительно Ω и ω равны: .... **2 балла**

Схема для данного решения.

1. Доказано, что треугольник RQC равнобедренный .... **3 балла**

За вычислительное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.), не доведённое до конца, можно получить баллы только, если результаты промежуточных вычислений сформулированы в виде равносильных геометрических утверждений, указанных в схеме оценивания.

№3. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим через $S(n)$ количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Известно, что $S(n) \neq 0$ для всех достаточно больших n. Докажите, что $S(n+1) < 2S(n)$ для всех достаточно больших n.

Решение.

Лемма 1. Количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах не превосходит $(n+1)^{k-1}$.

Доказательство. При данном n решение $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ однозначно задаётся набором $(x_2, x_3, \ldots, x_k)$. Однако $0 \leqslant x_i \leq n$, поэтому таких наборов не более $(n+1)^{k-1}$.

Лемма 2. Если уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ имеет решение в целых неотрицательных числах при всех достаточно больших n, то при всех достаточно больших n количество таких решений не менее cn^{k-1}, где c – положительное число, не зависящее от n.

Доказательство. Поскольку уравнение $a_1x_1+\cdots+a_kx_k = n$ разрешимо в целых числах, разрешимо и сравнение $a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \equiv n \pmod{a_1}$; пусть $(t_2, \ldots, t_k)$ – решение этого сравнения.

Среди целых неотрицательных чисел, не превосходящих данного M, выбрать число $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ можно не менее, чем $[\frac{M}{a_1}]$ способами. Поэтому существует не менее $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \cdots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$ наборов $(x_2, x_3, \ldots, x_k)$ целых неотрицательных чисел, в которых $x_i \equiv t_i \pmod{a_1}$ и $a_ix_i \leqslant \frac{n}{k}$ при $2 \leqslant i \leqslant k$. Для каждого такого набора число $n - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_kx_k \geq n - \frac{(k-1)n}{k}$ неотрицательно и кратно a_1, то есть каждый такой набор можно дополнить до некоторого решения $(x_1, \ldots, x_k)$. Таким образом, количество решений уравнения не менее $[\frac{n}{ka_1a_2}] \cdot \cdots \cdot [\frac{n}{ka_1a_k}]$, откуда немедленно следует утверждение леммы.

Перейдём к решению задачи. По условию для некоторого натурального n существуют наборы целых чисел $(r_1, \ldots, r_k)$ и $(s_1, \ldots, s_k)$, для которых $a_1r_1 + \cdots + a_kr_k = n$ и $a_1s_1 + \cdots + a_ks_k = n+1$. Вычитая, получаем, что числа $v_i = s_i - r_i$ удовлетворяют соотношению $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 1$. При каждом n сопоставим каждому решению $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$ в целых неотрицательных числах решение $(x_1 - v_1, \ldots, x_k - v_k)$ уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$. Если $x_i \geqslant v_i$ при всех i, числа $x_i - v_i$ тоже будут неотрицательными. Таким образом, разность $S(n+1) - S(n)$ не превосходит количества решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$, в которых хотя бы одно из x_i не превосходит соответствующего v_i. Для каждого i таких значений x_i конечное число; для каждого такого значения $x_i = j$ количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n+1$ с $x_i = j$, то есть $a_1x_1 + \cdots + a_{i-1}x_{i-1} + a_{i+1}x_{i+1} + \cdots + a_kx_k = n + 1 - ja_i$, по лемме 1 не превосходит $(n+2-ja_i)^{k-2} \leqslant (n+2)^{k-2}$. Поэтому и вся разность $S(n+1) - S(n)$ не превосходит $A(n+2)^{k-2}$ для некоторого постоянного A. А само $S(n)$ по лемме 2 не меньше Cn^{k-1} для некоторого положительного C. Осталось заметить, что $A(n+2)^{k-2} < Cn^{k-1}$ при всех достаточно больших n.

Из приведённого решения видно, что множитель 2 в условии задачи можно заменить на $1+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

Схема оценивания

Общие баллы

(0.1) Задача решена для попарно взаимно простых a_i: .... **1 балл**
(не суммируется с остальными)

Схема для данного решения

(1.1) Лемма 1: .... **1 балл**
(суммируется с любым из пунктов (1.2), (1.3), (1.4))

(1.2) Лемма 2: .... **2 балла**

(1.3) Соответствие между решениями (x_i) и $(x_i - v_i)$ для правых частей, отличающихся на 1:
.... **1 балл**

(1.4) (1.2) вместе с (1.3): .... **4 балла**