

XIX International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 3 february 2023

Second day

(Time allowed is 4.5 hours. Each problem is worth 7 points)

№4. The sum of $n > 2$ nonzero real numbers, not necessarily distinct, is 0. For each of $2^n - 1$ ways to select several of those numbers (at least one) the sum of the selected numbers is calculated; all the resulting sums are written in line in non-increasing order. The first number in the line equals S . Determine the minimum possible value of the second number in the line.

№5. We call a positive integer *good* if it can be presented in the form $ax^2 + bxy + cy^2$ with integral a, b, c, x, y and $b^2 - 4ac = -20$. Prove that the product of every two good numbers is also good.

№6. Several blue and green napkins (possibly of different size) with vertical and horizontal sides are placed on the plane. It turned out that every two napkins of different colours can be intersected by a vertical or horizontal line (possibly on the border). Prove that one can choose a colour, two horizontal lines, and one vertical line, so that every napkin of the chosen colour is intersected by at least one chosen line.

Второй день

(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

№4. Сумма $n > 2$ ненулевых вещественных чисел (не обязательно различных) равна нулю. Для каждого из $2^n - 1$ способов выбрать несколько (не менее одного) из этих чисел подсчитали сумму выбранных чисел и все полученные $2^n - 1$ сумм выписали в строку в невозрастающем порядке. Первое число в строке равно S . Найдите наименьшее возможное значение второго числа в строке.

№5. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представляется в виде $ax^2 + bxy + cy^2$, где a, b, c, x, y – целые числа и $b^2 - 4ac = -20$. Докажите, что произведение двух хороших чисел – тоже хорошее число.

№6. На плоскость положили несколько синих и зелёных прямоугольных салфеток (возможно, разного размера) с вертикальными и горизонтальными сторонами. Оказалось, что любые две салфетки разного цвета можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой (возможно, по границе). Докажите, что можно выбрать цвет, две горизонтальных прямых и одну вертикальную прямую так, что каждую салфетку выбранного цвета пересекает хотя бы одна из выбранных прямых.

Екінші күн

(Жұмысты орындау уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№4. Нөлге тең емес нақты n санның қосындысы нөлге тең ($n > 2$ және сандар әртүрлі болуы міндетті емес). Осы сандардың бірнешеуін (кем дегенде біреуін) таңдаудың $2^n - 1$ әдісі бар. Әр әдістегі таңдалған сандардың қосындысын есептеп, барлық $2^n - 1$ қосындыны бір қатарға өспейтін ретпен жазып шыққан. Осы қатарда бірінші сан S -ке тең. Осы қатардағы екінші санның ең кіші мүмкін мәні нешеге тең?

№5. Егер натурал санды $ax^2 + bxy + cy^2$ түрінде келтіруге болса, бұл жерде a, b, c, x, y — бүтін сандар және $b^2 - 4ac = -20$, сол санды *жақсы* сан деп айтамыз. Екі жақсы санның көбейтіндісі де жақсы сан болатынын дәлелдеңіз.

№6. Түсі жасыл немесе көк болатын, тіктөртбұрыш пішінді бірнеше майлық бар (олардың өлшемдері әртүрлі болуы мүмкін). Олардың әрбірін қабырғалары көлденең және тігінен келетіндей жазықтыққа қойып шыққан. Түрлі түсті кез келген екі майлықты тік немесе көлденең сызықпен (мүмкін, шекара бойымен) қиып өтуге болатыны белгілі. Келесі шартты қанағаттандыратын бір түс таңдап алуға болатынын дәлелдеңіз: екі көлденең және бір тік түзуді таңдауға болады және таңдап алған түстің барлық майлықтарын осы таңдаған үш түзудің кемінде біреуі қияды.