XIX International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2 february 2023

First day

(Time allowed is 4.5 hours. Each problem is worth 7 points)

№1. Pete has a deck of 1001 cards; the numbers $1, 2, \ldots, 1001$ are written on those cards with a blue pen, one number per card. Pete arranged the cards in a circle, with the blue numbers on their bottom sides. Then, for each card C, Pete considered 500 cards following C in the clockwise order and counted the number $f(C)$ of those whose blue numbers are larger than the blue number on C. Pete wrote the number $f(C)$ on the top side of C with a red pen. Prove that Basil, who sees all the red numbers on the cards, can determine the blue number on each card.

№2. Let Ω be the circumcircle of a scalene triangle ABC. The line tangent at C to the circumcircle of triangle ABC meets the line AB at point D. A line passing through D intersects the segments AC and BC at K and L, respectively. Points M and N are chosen on the segment AB so that $AC \parallel NL$ and $BC \parallel KM$. Let NL and KM intersect at point P inside the triangle ABC. The line CP meets the circumcircle ω of MNP again at Q. Prove that the line DQ is tangent to ω.

№3. Given positive integers a_1, a_2, …, a_k. Let $S(n)$ denote the number of solutions of the equation $a_1x_1 + {} + \cdots + a_kx_k = n$ in nonnegative integers x_1, x_2, …, x_k. It is known that $S(n) \neq 0$ for all large enough n. Prove that $S(n+1) < 2S(n)$ for all large enough n.

XIX Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2 февраля 2023 года

Первый день

(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

№1. У Пети есть 1001 карточка, на которых написаны синей ручкой числа $1, 2, \ldots, 1001$; на каждой карточке написано ровно одно число. Петя выложил карточки по кругу синими числами вниз. Затем для каждой карточки C Петя рассмотрел 500 карточек, следующих за C по часовой стрелке, и нашёл количество $f(C)$ тех из них, на которых синие числа больше, чем синее число на C. Число $f(C)$ Петя написал на верхней стороне карточки C красной ручкой. Докажите, что Вася, видя только все красные числа, может восстановить, какое синее число на какой карточке написано.

№2. Касательная в точке C к окружности Ω, описанной около неравнобедренного треугольника ABC, пересекает прямую AB в точке D. Через точку D проведена прямая, пересекающая отрезки AC и BC в точках K и L соответственно. На отрезке AB отметили точки M и N так, что $AC \parallel NL$ и $BC \parallel KM$. Пусть NL и KM пересеклись в точке P, лежащей внутри треугольника ABC. Прямая CP во второй раз пересекает окружность ω, описанную около треугольника MNP, в точке Q. Докажите, что прямая DQ касается ω.

№3. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_k. Обозначим через $S(n)$ количество решений уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ в целых неотрицательных числах x_1, x_2, $\ldots$, x_k. Известно, что $S(n) \neq 0$ для всех достаточно больших n. Докажите, что $S(n+1) < 2S(n)$ для всех достаточно больших n.

Математикадан халықаралық XIX Жәутіков олимпиадасы
Алматы, 2 ақпан 2023 жыл

Бірінші күн

(Жұмысты орындау уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№1. Петя көк қаламмен $1, 2, \ldots, 1001$ сандарын 1001 картаға жазып шықты (әрбір картада дәл бір сан жазылған). Сосын ол карталарды көк сандарымен төмен қаратып, шеңбер бойына қандай да бір ретпен қойып шықты. Кейін ол әрбір C картасы үшін, C-дан кейін сағат тілі бағытымен орналасқан 500 карталарды қарастырып, сол 500 карталардағы көк сандардың қаншасы C картасында жазылған көк саннан артық екенін санап, сол санды $f(C)$ деп белгіледі. Петя қызыл қаламмен әр C картасының жоғарғы жағына $f(C)$ санын жазды. Вася барлық қызыл сандарды көріп, қай картада қай көк сан жазылғанын қалпына келтіре алатынын дәлелдеңіз.

№2. Теңбүйірлі емес ABC үшбұрышына сырттай сызылған Ω шеңберге C нүктесінде жүргізілген жанама түзу AB түзуін D нүктесінде қияды. D арқылы өтететін түзу AC және BC қабырғаларын, сәйкесінше, K және L нүктелерінде қияды. AB қабырғасынан $AC \parallel NL$, $BC \parallel KM$ болатындай M және N нүктелері белгіленген. NL және KM түзулері P нүктесінде қиылысады (P $\triangle ABC$-ның ішінде жатыр). CP түзуі MNP үшбұрышына сырттай сызылған ω шеңберін екінші рет Q нүктесінде қияды. DQ түзуі ω-ны жанайтынын дәлелдеңіз.

№3. a_1, a_2, $\ldots$, a_k натурал сандары берілген. $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$ теңдеуінің теріс емес бүтін сандар жиынындағы шешімдер санын $S(n)$ деп белгілейік. Барлық жеткілікті үлкен n сандары үшін $S(n) \neq 0$ екені белгілі. Барлық жеткілікті үлкен n сандары үшін $S(n+1) < 2S(n)$ екенін дәлелде.