XVIII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 17 february 2022

Second day

(Time allowed is 4.5 hours. Each problem is worth 7 points)

№4. In triangle ABC, a point M is the midpoint of AB, and a point I is the incentre. Point A_1 is the reflection of A in BI, and B_1 is the reflection of B in AI. Let N be the midpoint of A_1B_1. Prove that $IN > IM$.

№5. A polynomial $f(x)$ with real coefficients of degree greater than 1 is given. Prove that there are infinitely many positive integers which cannot be represented in the form

$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n+k)$$

where n and k are positive integers.

№6. Do there exist two bounded sequences $a_1, a_2, \ldots$ and $b_1, b_2, \ldots$ such that for each positive integers n and $m > n$ at least one of the two inequalities $|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $|b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ holds?

XVIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 17 февраля 2022 года

Второй день

(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

№4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, а I — центр вписанной окружности. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BI, а точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AI. Пусть N — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $IN > IM$.

№5. Дан многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени выше 1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$f(n+1) + \cdots + f(n+k)$$

с натуральными n и k.

№6. Существуют ли две ограниченные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ такие, что для любых натуральных $m > n$ выполнено хотя бы одно из двух условий

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

Математикадан халықаралық XVIII Жәутіков олимпиадасы
Алматы, 17 ақпан 2022 жыл

Екінші күн

(Жұмысты орындау уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№4. I нүктесі ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңбер центрі. M нүктесі AB қабырғасының ортасы. A_1 нүктесі A нүктесіне BI түзуіне қарағандағы, ал B_1 нүктесі B нүктесіне AI түзуіне қарағандағы симметриялы нүктелер. N нүктесі A_1B_1 кесіндісінің ортасы. $IN > IM$ теңсіздігін дәлелдеңіз.

№5. Дәрежесі 1-ден үлкен, ал коэффициенттері нақты сандар болатын $f(x)$ көпмүшесі берілген. $f(n+1) + \cdots + f(n+k)$ түрінде көрсетуге болмайтын (бұл жерде n, k — натурал сандар) шексіз көп натурал сандарының табылатынын дәлелдеңіз.

№6. Кез келген натурал $m > n$ сандары үшін $|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ немесе $|b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}$ шарттарының кемінде біреуі орынладатындай, екеуі де шектелген $a_1, a_2, \ldots$ және $b_1, b_2, \ldots$ сандар тізбегі табылады ма?