№4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, а I — центр вписанной окружности. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой BI, а точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AI. Пусть N — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $IN > IM$.

Первое решение. Из симметрии получаем $IA_1 = IA$ и $IB_1 = IB$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
4(IN^2 - IM^2) &= \left|\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1}\right|^2 - \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right|^2 \\
&= \left(IA_1^2 + IB_1^2 + 2IA_1 \cdot IB_1 \cdot \cos\angle A_1IB_1\right) - \left(IA^2 + IB^2 + 2IA \cdot IB \cdot \cos\angle AIB\right) \\
&= 2IA \cdot IB \cdot (\cos\angle A_1IB_1 - \cos\angle AIB).
\end{aligned}
$$

Значит, для решения задачи достаточно доказать неравенство $\cos\angle A_1IB_1 > \cos\angle AIB$.

Заметим, что $\phi = \angle AIB = 90° + \angle ACB/2 > 90°$. Из симметрии имеем $\angle A_1IB = \angle AIB = \angle AIB_1 = \phi$. Поэтому, если $\phi \leq 120°$, то

$$\angle A_1IB_1 = 360° - (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) = 360° - 3\phi \in [0°, \phi),$$

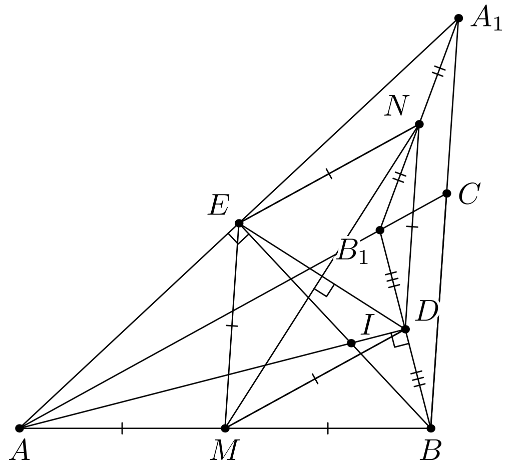
поскольку $\phi > 90°$. Отсюда следует требуемое неравенство.

Если же $\phi > 120°$, то

$$\angle A_1IB_1 = (\angle A_1IB + \angle AIB + \angle AIB_1) - 360° = 3\phi - 360° \in (0°, \phi),$$

поскольку $\phi < 180°$; отсюда опять же-таки следует требуемое.

Второе решение. Заметим, что угол AIB тупой, так как $\angle AIB = 90° + \angle ACB/2$. Понятно, что A_1 лежит на прямой BC, а B_1 — на прямой AC. Пусть D и E — середины оснований BB_1 и AA_1 равнобедренных треугольников BAB_1 и ABA_1 соответственно. Тогда $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, то есть AE и BD — высоты тупоугольного треугольника AIB. Поэтому точки I и M лежат по одну сторону от прямой DE. Кроме того, точки A, B, D и E лежат на окружности с центром M.



Из свойства средней линии треугольника имеем $DN = BA_1/2 = BA/2 = DM$, то есть $DN = DM = AB/2$. Аналогично получим $EN = EM = AB/2$. Следовательно, $MDNE$ — ромб, в котором прямая DE является серединным перпендикуляром отрезка MN. Поскольку I и M лежат по одну сторону от прямой DE, получаем $IM < IN$. Последнее не сложно доказать. Полуплоскость относительно серединного перпендикуляра DE, в которой лежит M — это геометрическое место точек, которые ближе к M, чем к N. Поскольку I лежит в этой полуплоскости, то $IM < IN$.

№5. Дан многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени выше 1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$f(n+1)+\cdots+f(n+k)$$

с натуральными n и k.

Решение. Пусть старший член многочлена $f(x)$ равен ax^m. При $a<0$ среди значений $f(x)$ в целых точках лишь конечное число положительных, следовательно, сумма $f(n+1)+\cdots+f(n+k)$ ограничена и принимает только конечное число натуральных значений. Поэтому мы ограничимся случаем $a>0$. В этом случае $f(x)$ принимает при натуральных x лишь конечное число отрицательных значений, и существует d такое, что $f(x+1)+f(x+2)+\cdots+f(x+d)$ всегда больше 0.

Лемма. Если $P(x)$ – многочлен степени m с положительным старшим коэффициентом, то $P(x)>$ $>bx^m$ при некотором положительном b и всех x, больших некоторого C.

Действительно, если r – старший коэффициент многочлена P, то при любом $b<r$ многочлен $P(x)-bx^m$ имеет положительный старший коэффициент и поэтому положителен при всех достаточно больших x.

Многочлен $f(\frac{x}{2}-1)$ имеет, как и $f(x)$, степень m, поэтому можно выбрать положительное b так, чтобы при всех $x>C$ выполнялись оба неравенства $f(x)>bx^m$, $f(\frac{x}{2}-1)>bx^m$.

Рассмотрим достаточно большое число M и оценим количество пар (n,k), для которых $f(n+1)+$ $+\cdots+f(n+k)\leq M$.

Если $n>\sqrt{\frac{M}{b}}$ (мы взяли M таким, чтобы правая часть была больше C), то каждое слагаемое в сумме больше, чем $bn^m\geq bn^2>M$, поэтому сумма больше M.

Если $k>\sqrt[3]{\frac{2M}{b}}$ (мы взяли M таким, чтобы правая часть была больше $2d$), то хотя бы $k/2$ из чисел $n+1,\ \ldots,\ n+k$ не меньше $k/2-1$, следовательно, соответствующие слагаемые не меньше $bk^m\geq bk^2$, а сумма этих слагаемых не меньше $\frac{k}{2}\times bk^2=\frac{bk^3}{2}>M$. Сумма остальных слагаемых положительна (так как $k>2d$), и вся сумма снова больше M.

Таким образом, пар натуральных чисел (n,k), для которых $f(n+1)+\cdots+f(n+k)\leq M$, не больше $\sqrt[3]{\frac{2}{b}}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}\cdot M^{5/6}$, что при достаточно больших M меньше, чем $M/2$. Мы видим, что существует не менее $M/2$ натуральных чисел без требуемого представления, и M может быть сколь угодно большим.

№6. Существуют ли две ограниченные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ такие, что для любых натуральных $m > n$ выполнено хотя бы одно из двух условий

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

Решение. Предположим, что такие последовательности (a_n) и (b_n) существуют. Для наглядности пару действительных чисел (x, y) будем называть *точкой на декратовой плоскости* с координатами (x, y). Для натурального n через A_n обозначим точку с координатами (a_n, b_n). Переформулируем условие задачи: для любого n в квадрат $\{(x,y): \ |x - a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \ |y - b_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ не попадают точки A_m при $m \ne n$.

Тогда сопоставим каждой точке A_n квадрат $\{(x,y): \ |x-a_n| \le \frac{1}{2\sqrt{n}}, \ |y-b_n| \le \frac{1}{2\sqrt{n}}\}$, который будем называть *личным квадратом* точки A_n. Из переформулированного условия следует, что личные квадраты точек A_n и A_m не пересекаются (естественно, при $m \ne n$).

Пусть модули членов последовательностей (a_n) и (b_n) ограничены константой C. Тогда все личные квадраты точек A_n лежат в квадрате $\{(x,y): \ |x| \le C + \frac{1}{2}, \ |y| \le C + \frac{1}{2}\}$, то есть в квадрате с площадью $(2C+1)^2$. Но личные квадраты не пересекаются, и площадь соответствующего точке A_n равна $\frac{1}{n}$. Заметим, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ расходится, то есть найдется его конечный отрезок, сумма которого больше чем, в частности, $(2C+1)^2$, что невозможно если соответствующие личные квадраты лежат внутри квадрата с площадью $(2C+1)^2$ и не пересекаются. Это противоречие доказывает, что последовательностей (a_n) и (b_n) с требуемым свойством не существует.