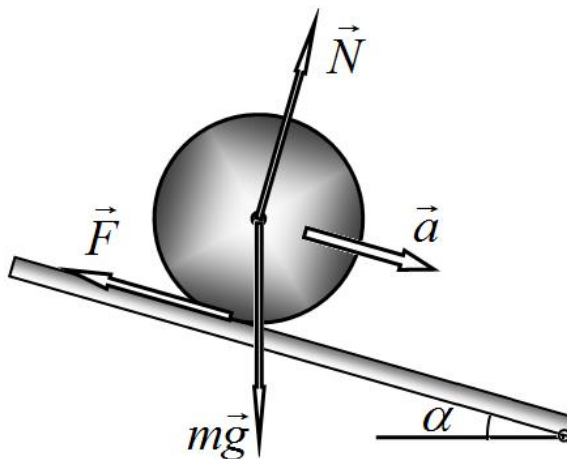


Сухое трение

Эксперимент 1. Трение скольжения

Теоретическая часть

1.1 Формулы для ускорений оси цилиндра могут быть получены различными способами, но все они основаны на использовании второго закона Ньютона. При качении цилиндра по наклонной плоскости на него действуют следующие силы: $m\vec{g}$ - сила тяжести, \vec{N} - сила нормальной реакции, \vec{F} - сила трения.



А) В этом случае сила трения работы не совершает, поэтому можно записать уравнения закона сохранения механической энергии

$$\frac{3}{4}mR^2V_c^2 = mgS \sin \alpha, \quad (1)$$

в которой учтена энергия вращения цилиндра вокруг собственной оси.

Для определения ускорения вычислим производную по времени от этого уравнения

$$\frac{3}{4}mR^2 \cdot 2V_c a = mg \sin \alpha \cdot V_c. \quad (2)$$

Здесь $V_c = \frac{dS}{dt}$ - скорость оси цилиндра, $a = \frac{dV_c}{dt}$ - ее ускорение.

Из уравнения (2) следует, что при качении без проскальзывания ускорение оси цилиндра описывается формулой

$$a_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha. \quad (3)$$

Альтернативным способом вывода этой формулы является использование уравнения динамики вращательного движения.

Б) Если цилиндр при движении проскальзывает, то сила трения определяется формулой

$$F = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha, \quad (4)$$

тогда уравнение второго закона Ньютона в проекции на наклонную плоскость имеет вид

$$ma = mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha, \quad (5)$$

Из этого уравнения следует, что ускорение цилиндра в этом случае равно

$$a_2 = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha), \quad (6)$$

1.2 Очевидно, что движение без проскальзывания будет происходить при углах наклона плоскости, меньших некоторого критического значения α_{cr} , значение которого может быть найдено различными способами. Например, его можно найти, если приравнять ускорения, описываемые формулами (3) и (6).

Приведем еще один метод расчета критического угла. Из уравнения (2) закона Ньютона получаем

$$ma = mg \sin \alpha - F.$$

Выразим значение силы трения покоя с учетом найденного ускорения

$$F = mg \sin \alpha - ma = \frac{1}{3} mg \sin \alpha$$

и учтем, что эта сила не превышает силы трения скольжения

$$F < \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha.$$

Из последнего неравенства находим

$$\frac{1}{3} mg \sin \alpha < \mu_s mg \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 3\mu_s. \quad (7)$$

Таким образом, значение критического угла определяется формулой

$$\alpha_{cr} = \operatorname{arctg}(3\mu_s). \quad (8)$$

Обработка результатов измерений

1.3 Для расчета ускорений по приведенным в условии результатам измерений, запишем выражения для расстояний, пройденными шариками

$$\begin{cases} S_1 = V_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ S_2 = V_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_2}{t_2} - \frac{S_1}{t_1} = \frac{a}{2}(t_2 - t_1). \quad (9)$$

Откуда следует формула для расчета ускорений:

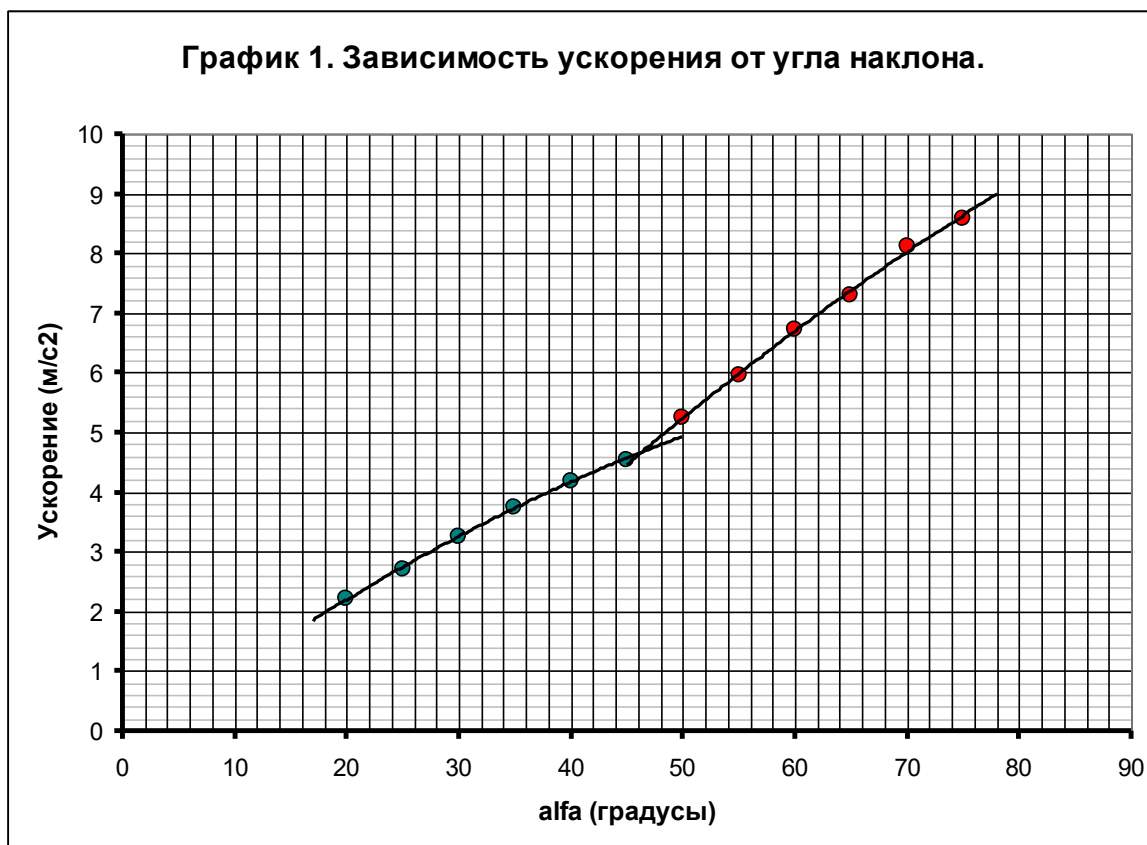
$$a = \frac{2 \left(\frac{S_2}{t_2} - \frac{S_1}{t_1} \right)}{t_2 - t_1}. \quad (10)$$

Результаты расчетов ускорений по формуле (10) приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Расчет ускорений.

α°	t_1, c	t_2, c	$a, \frac{m}{c^2}$
20	0.4546	0.7187	2.208
25	0.3936	0.6290	2.715
30	0.3462	0.5589	3.244
35	0.3229	0.5211	3.739
40	0.3358	0.5283	4.196
45	0.3084	0.4911	4.543
50	0.2682	0.4347	5.239
55	0.2816	0.4432	5.950
60	0.2600	0.4113	6.718
65	0.2461	0.3908	7.286
70	0.2308	0.3675	8.116
75	0.2218	0.3542	8.595

По этим данным построен График 1 зависимости ускорения от угла наклона плоскости.



На построенном графике хорошо видно, что он состоит из двух различных ветвей: при малых углах движение происходит без проскальзывания (ускорение описывается формулой (3)), при больших углах цилиндр проскальзывает, поэтому ускорение описывается формулой (6). Абсцисса точки пересечения этих графиков и является критическим углом, который приблизительно равен

$$\alpha_{cr} \approx 46^\circ.$$

Примечание: В принципе, можно не задавать ускорение свободного падения, а определять его по поведению ускорения на малых углах. В данной работе этого не требуется.

Линеаризация полученной зависимости может быть проведена двумя альтернативными и примерно равноценными способами. Рассмотрим эти способы.

Способ 1

1.4 В качестве величины Y возьмем величину

$$Y = \frac{a}{g \cos \alpha}, \quad (11)$$

тогда из формул для ускорений следует:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} g \sin \alpha \\ a_2 = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{g \cos \alpha} = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{a_2}{g \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \mu_s \end{cases},$$

т.е. введенная величина Y линейно зависит от $X = \operatorname{tg} \alpha$, причем

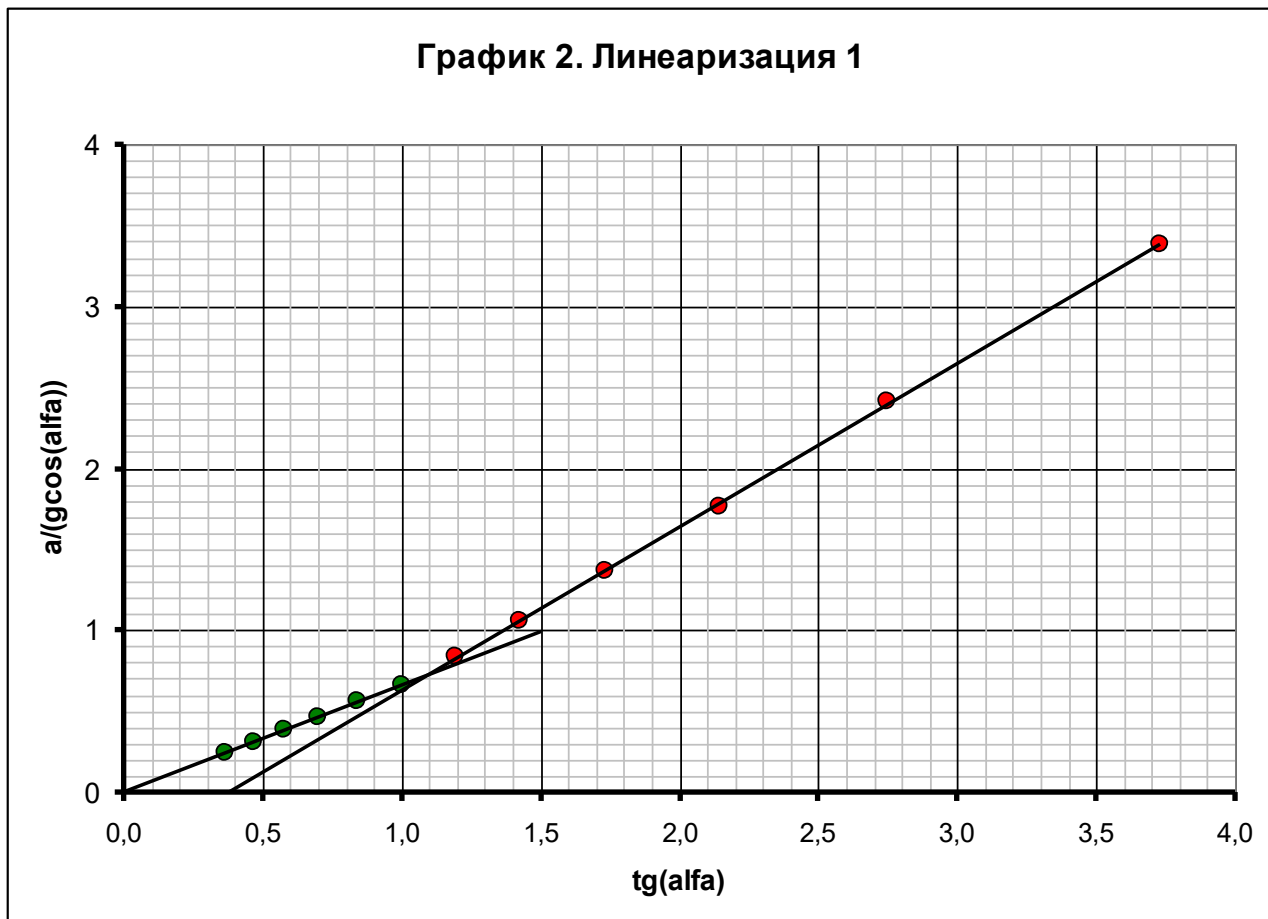
$$\begin{cases} Y = \frac{2}{3} X, & \alpha < \alpha_{cr} \\ Y = X - \mu_s, & \alpha > \alpha_{cr} \end{cases}. \quad (12)$$

Расчеты введенных величин приведены в Таблице 2. В таблице выделены значения, соответствующие движению без проскальзывания.

Таблица 2. Линеаризация 1.

α°	$a, \frac{м}{с^2}$	$X = \operatorname{tg} \alpha$	$Y = \frac{a}{g \cos \alpha}$
20	2.208	0.3640	0.2395
25	2.715	0.4663	0.3053
30	3.244	0.5774	0.3818
35	3.739	0.7002	0.4653
40	4.196	0.8391	0.5584
45	4.543	1.0000	0.6549
50	5.239	1.1918	0.8308
55	5.950	1.4281	1.0574
60	6.718	1.7321	1.3697
65	7.286	2.1445	1.7575
70	8.116	2.7475	2.4188
75	8.595	3.7321	3.3851

На Графике 2 приведены графики этих зависимостей.



1.5 Действительно, обе зависимости оказались линейными. Представим эти зависимости в виде $Y = cX + b$.

(13)

Расчет по МНК коэффициентов этих зависимостей дает следующие значения:

При движении

без проскальзывания:

$$c_1 = 0.659 \pm 0.008$$

$$b_1 = 0.0004 \pm 0.005$$

с проскальзыванием:

$$c_2 = 1.011 \pm 0.009$$

$$b_2 = -0.38 \pm 0.02$$

Из формулы (12) следует, что коэффициент трения скольжения равен

$$\mu_s = -b_2 = 0.38 \pm 0.02. \quad (14)$$

Отметим, что рассчитанная случайная ошибка (порядка 10%) значительно превышает относительные ошибки прямых измерений расстояний между датчиками и времен движения. Поэтому последние можно не учитывать.

1.6 Значение критического угла можно найти, приравняв обе линейные зависимости:

$$\frac{2}{3}X = X - \mu_s \Rightarrow X_{cr} = \operatorname{tg} \alpha_{cr} = 3\mu_s, \quad (15)$$

или

$$\alpha_{cr} = \operatorname{arctg}(3\mu_s) = 0.855 = 49^\circ$$

Погрешность найденного значения равна

$$\Delta \alpha_{cr} = \frac{3\Delta\mu_s}{(3\mu_s)^2 + 1} = 0.03,$$

а значит окончательно получаем

$$\alpha_{cr} = 0.86 \pm 0.03 = 49^\circ \pm 2^\circ. \quad (16)$$

Способ 2

1.4 В качестве величины Y возьмем величину

$$Y = \frac{a}{g \sin \alpha}, \quad (17)$$

тогда из формул для ускорений следует:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3}g \sin \alpha \\ a_2 = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{g \sin \alpha} = \frac{2}{3} \\ \frac{a_2}{g \sin \alpha} = 1 - \mu_s \operatorname{ctg} \alpha \end{cases},$$

т.е. введенная величина Y линейно зависит от $X = \operatorname{ctg} \alpha$, причем

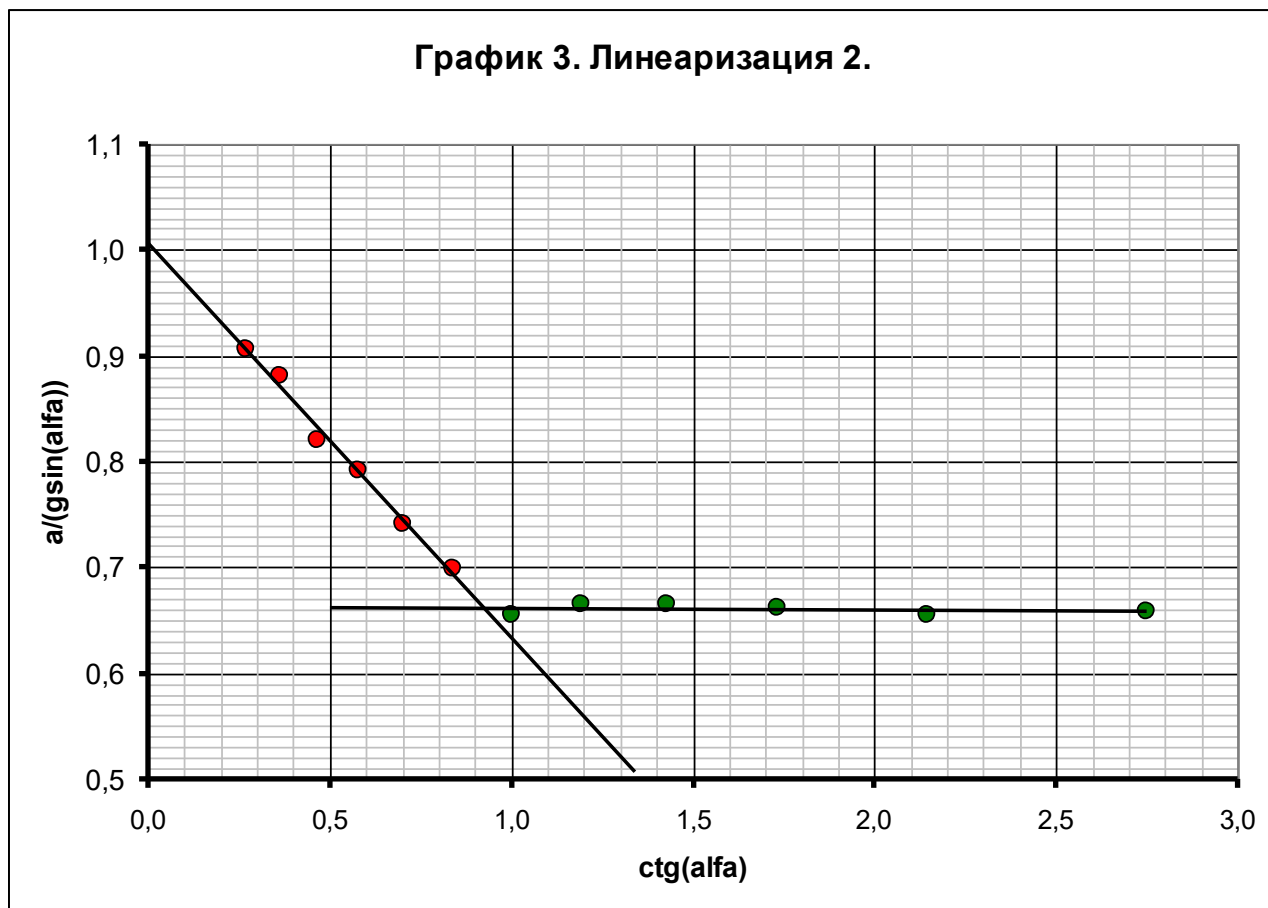
$$\begin{cases} Y = \frac{2}{3}, & \alpha < \alpha_{cr} \\ Y = 1 - \mu_s X, & \alpha > \alpha_{cr} \end{cases}. \quad (18)$$

Расчеты введенных величин приведены в Таблице 3. В таблице выделены значения, соответствующие движению без проскальзывания.

Таблица 3. Линеаризация 2.

α°	$a, \frac{m}{c^2}$	$X = \operatorname{ctg} \alpha$	$Y = \frac{a}{g \sin \alpha}$
20	2.208	2.7475	0.6580
25	2.715	2.1445	0.6548
30	3.244	1.7321	0.6613
35	3.739	1.4281	0.6645
40	4.196	1.1918	0.6655
45	4.543	1.0000	0.6549
50	5.239	0.8391	0.6972
55	5.950	0.7002	0.7404
60	6.718	0.5774	0.7908
65	7.286	0.4663	0.8195
70	8.116	0.3640	0.8804
75	8.595	0.2679	0.9070

На Графике 3 приведены графики этих зависимостей.



1.5 Действительно, обе зависимости оказались линейными. Представим эти зависимости в виде

$$Y = cX + b. \quad (19)$$

Расчет по МНК коэффициентов этих зависимостей дает следующие значения:

При движении

без проскальзывания:

$$c_1 = -0.002 \pm 0.003$$

$$b_1 = 0.663 \pm 0.006$$

с проскальзыванием:

$$c_2 = -0.38 \pm 0.02$$

$$b_2 = 1.01 \pm 0.01$$

Из формулы (18) следует, что коэффициент трения скольжения равен

$$\mu_s = -c_2 = 0.38 \pm 0.02. \quad (20)$$

В этом случае погрешности прямых измерений также можно не учитывать.

1.6 Расчет критического угла проводится аналогично

$$\alpha_{cr} = \arctg(3\mu_s) = 0.84 = 48^\circ$$

Погрешность найденного значения равна

$$\Delta\alpha_{cr} = \frac{3\Delta\mu_s}{(3\mu_s)^2 + 1} = 0.02,$$

а значит окончательно получаем

$$\alpha_{cr} = 0,84 \pm 0,01 = 48^\circ \pm 1^\circ. \quad (21)$$

Эксперимент 2. Трение качения

Теоретическая часть

2.1 При смещении оси цилиндра на расстояние x ось стержень отклоняется на угол

$$\varphi = \frac{x}{R}. \quad (22)$$

Для расчета периода малых колебаний запишем уравнение закона сохранения энергии

$$\frac{3}{4}MV^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi_0). \quad (23)$$

При этом мы пренебрегли кинетической энергией движения стержня, так как его масса мала.

С другой стороны, потенциальная энергия массивного цилиндра остается постоянной, поэтому изменение потенциальной энергии системы есть изменение потенциальной энергии стержня. При малых колебаниях следует использовать приближенную формулу для косинуса малого угла

$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, что приводит к упрощению уравнения (23):

$$\frac{3}{4}MV^2 + mgl \frac{\varphi^2}{2} = mgl \frac{\varphi_0^2}{2}.$$

При использовании соотношения (22) получим уравнение

$$\frac{3}{4}MV^2 + \frac{mgl}{R^2} \frac{x^2}{2} = \frac{mgl}{R^2} \frac{x_0^2}{2}, \quad (24)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgl}}. \quad (25)$$

2.2 В точках останова кинетическая энергия цилиндра со стержнем равна нулю, поэтому изменение потенциальной энергии при смещении от одной до следующей остановки равно работе силы трения. Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$mgl(1 - \cos \varphi_k) = mgl(1 - \cos \varphi_{k-1}) - \mu_r Mg|x_k - x_{k-1}|. \quad (26)$$

Воспользуемся связью между углом поворота и смещением цилиндра (22), получим требуемое соотношение

$$\left(1 - \cos \frac{x_k}{R}\right) = \left(1 - \cos \frac{x_{k-1}}{R}\right) - \mu_r \frac{M}{ml}|x_k - x_{k-1}|. \quad (27)$$

2.3 Просуммируем соотношения аналогичные (27) для всех интервалов движения от начального положения до k -ой точки останова, в результате чего получим

$$\left(1 - \cos \frac{x_k}{R}\right) = \left(1 - \cos \frac{x_0}{R}\right) - \mu_r \frac{M}{ml} S_k, \quad (28)$$

где S_k – путь, который проходит цилиндр до k -ой точки останова

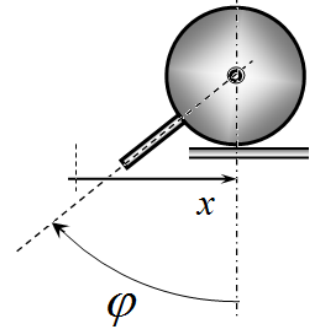
$$S_k = |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_k - x_{k-1}| = \sum_{j=1}^k |x_j - x_{j-1}|. \quad (29)$$

В начальном положении стержень располагался вертикально, т.е. $\varphi_0 = \pi$, следовательно $x_0 = \pi R$, поэтому можно выразить

$$R = \frac{x_0}{\pi}. \quad (30)$$

Из формулы для периода колебаний также можно выразить:

$$\frac{M}{ml} = \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{2g}{3R^2} = \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^2} = \frac{T^2 g}{6x_0^2}.$$



Подставим эти значения в уравнение, в результате получим

$$1 - \cos\left(\pi \frac{x_k}{x_0}\right) = 2 - \mu_r \frac{T^2 g}{6x_0^2} S_k. \quad (31)$$

Таким образом, величина $Y_k = 1 - \cos\left(\pi \frac{x_k}{x_0}\right)$ линейно зависит от пройденного пути S_k .

Коэффициент наклона зависимости содержит искомый коэффициент трения качения и известные величины. Единицу в выражении (31), конечно, можно опустить. Но величина Y с точностью до постоянного множителя равна потенциальной энергии, поэтому в принятом определении зависимость $Y(S)$ более наглядна.

Обработка результатов измерений

2.4 Расчет периода колебаний проводится традиционным способом.

Рассчитываем среднее значение времени 5 колебаний: $\langle t_5 \rangle = 7.354 \text{ с}$;

Рассчитываем случайную погрешность этой величины: $\Delta t_5 = 2 \sqrt{\frac{\sum (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0.11 \text{ с}$.

Тогда период колебаний равен

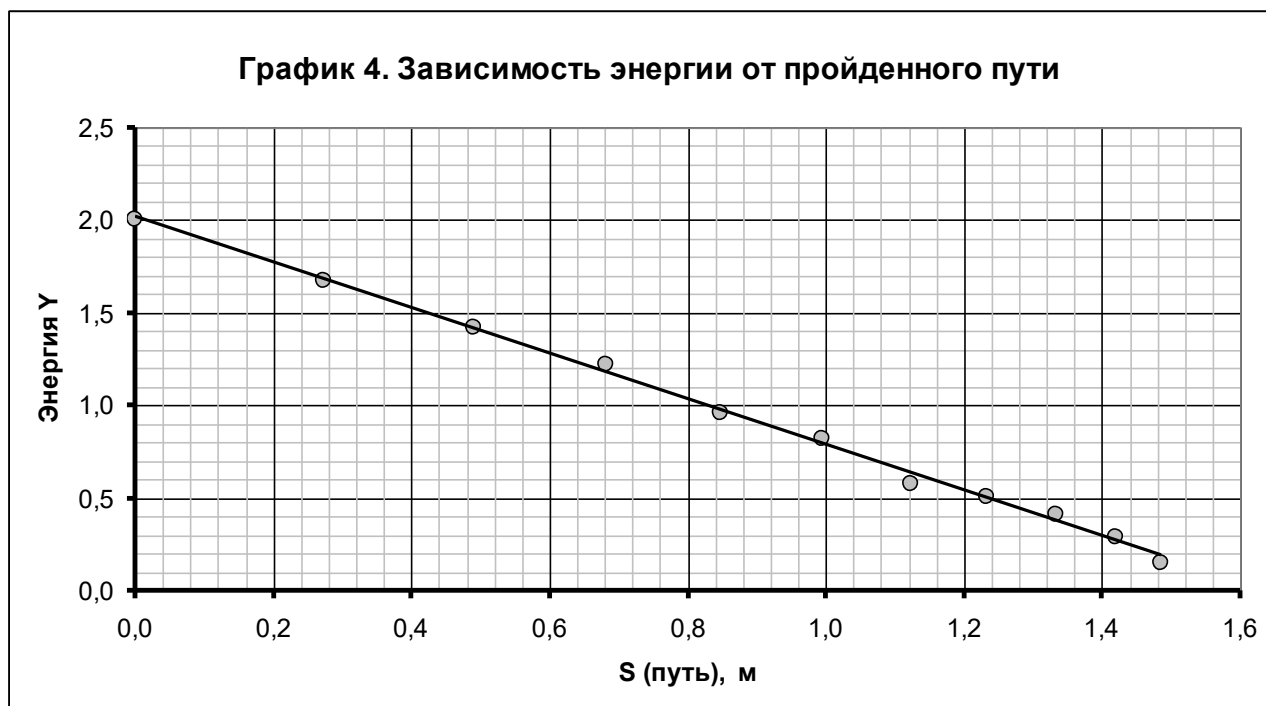
$$T = (1.47 \pm 0.02) \text{ с}. \quad (32)$$

2.5 Результаты расчетов величин, входящих в функцию (31) приведены в Таблице 4.

Таблица 4. Линеаризованная зависимость.

k	x_k , см	$\Delta S_k = x_k - x_{k-1} $, м	S_k , м	$Y_k = 1 - \cos\left(\pi \frac{x_k}{x_0}\right)$
0	15.8		0	2.000
1	-11.6	0.274	0.274	1.671
2	10.1	0.217	0.491	1.424
3	-9.0	0.191	0.682	1.217
4	7.7	0.167	0.849	0.960
5	-7.0	0.147	0.996	0.822
6	5.7	0.127	1.123	0.576
7	-5.3	0.110	1.233	0.506
8	4.7	0.100	1.333	0.406
9	-3.9	0.086	1.419	0.286
10	2.8	0.067	1.486	0.151

График зависимости $Y(S)$ показан на следующем рисунке.



2.6 Полученная зависимость является линейной, что подтверждает использованную теоретическую модель. Коэффициент наклона данного графика, рассчитанный по методу наименьших квадратов равен

$$C = (1.23 \pm 0.02) \text{ м}^{-1}.$$

Теоретическая формула для этого коэффициента позволяет выразить значение коэффициента трения качения:

$$C = \mu_r \frac{T^2 g}{6x_0^2} \Rightarrow \mu_r = C \frac{6x_0^2}{T^2 g} = 8.69 \cdot 10^{-3}. \quad (33)$$

Для расчета погрешности найденного значения следует использовать формулу для погрешности косвенных измерений:

$$\begin{aligned} \Delta\mu_r &= \mu_r \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{\langle C \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta x_0}{\langle x_0 \rangle}\right)^2} = \\ &= 8.69 \cdot 10^{-3} \sqrt{\left(\frac{0.02}{1.23}\right)^2 + \left(2 \frac{0.02}{1.47}\right)^2 + \left(2 \frac{0.2}{15.8}\right)^2} = 3.8 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (34)$$

Окончательный результат записываем в виде

$$\mu_r = (8.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}. \quad (35)$$

Пункт	Содержание	Баллы	Всего
Эксперимент 1. Трение скольжения			10.0
Теоретическая часть			1.5
1.1	Движение без проскальзывания:		1.0
	уравнение движения;	0.2	
	формула (3);	0.3	
	Движение с проскальзыванием:		
	уравнение движения;	0.2	
	формула (6);	0.3	
1.2	Значение критического угла:		0.5
	условие начала проскальзывания: граничное значение силы трения покоя; равенство ускорений (3) и (6);	0.2	

	связь между критическим углом и коэффициентом трения: формула (7) или (8);	0.3	
Обработка результатов измерений			8.5
1.3	Расчет ускорений: формула для расчета ускорений (10);	0.2	2.5
	проведен расчет всех ускорений (оценивается, если оценена формула для расчета ускорения); по 0.1 за каждую точку, допустимая погрешность расчета ускорения ± 0.01 ;	1.2	
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты расчетов ускорений):		
	оси подписаны и оцифрованы;	0.1	
	нанесены все точки;	0.1	
	проведены две сглаживающие кривые линии;	0.2	
	получены две зависимости: на графике видны две различные пересекающиеся кривые;	0.3	
	Значение критического угла;		
	метод определения: как точка пересечения двух кривых;	0.2	
	численное значение: допустимая погрешность $\pm 1^\circ$;	0.2	
1.4	Линеаризация зависимости: новые переменные: любые разумные: $\left(\frac{a}{\sin \alpha}, ctg \alpha\right), \left(\frac{a}{\cos \alpha}, tg \alpha\right)$, и равносильные, приводящие к линейным зависимостям;	1.0	2.8
	проведены расчеты: оценивается, если оценен выбор новых переменных X, Y ; 0.1 за каждую правильно рассчитанную точку, допустимая погрешность ± 0.02 ;	1.2	
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты расчетов переменных X, Y):		
	оси подписаны и оцифрованы;	0.1	
	нанесены все точки;	0.1	
	получены две прямые;	0.2	
	проведены две сглаживающие прямые;	0.2	
1.5	Расчет коэффициента трения скольжения: рассчитаны коэффициенты линейных зависимостей: 0.2 за каждый коэффициент (графически по всем точкам, МНК); 0.1 – по двум точкам; использование теоретических значений не оценивается;	0.8	1.9
	формула для коэффициента трения через коэффициенты линейных зависимостей;	0.2	
	численное значение коэффициента трения скольжения: оценивается, если оценена формула для коэффициента трения, допустимая погрешность ± 0.05 ;	0.4	
	формула для погрешности: только через коэффициенты линейных зависимостей;	0.2	
	численное значение погрешности: оценивается, если оценена формула;	0.2	
	правильное округление;	0.1	
1.6	Значение критического угла:		1.3
	метод расчета: аналитический расчет точки пересечения двух	0.5	

	прямых, допустимо использование численных теоретических значений коэффициентов;		
	численное значение критического угла: оценивается, если оценен метод определения;	0.2	
	формула для погрешности: через погрешности коэффициентов прямых;	0.3	
	численное значение погрешности: оценивается, если оценена формула;	0.2	
	правильное округление;	0.1	
Эксперимент 2. Трение качения			10.0
Теоретическая часть			2.5
2.1	Вывод формулы для периода малых колебаний:		0.5
	исходное уравнение: либо динамическое, либо энергетическое;	0.2	
	приближение малых колебаний;	0.1	
	формула (25) для периода: неверный численный коэффициент (-0.1);	0.2	
2.2	Рекуррентное соотношение:		1.0
	использование закона сохранения энергии;	0.3	
	выражение для потенциальной энергии через угол отклонения;	0.2	
	связь угла и координаты;	0.1	
	окончательный вид рекуррентного соотношения: формула (27) или равносильная;	0.4	
2.3	Выражение для координат точек останова:		1.0
	выражение изменения энергии через пройденный путь;	0.2	
	определение радиуса диска через начальное отклонение;	0.2	
	использование формулы для периода малых колебаний;	0.2	
	окончательное соотношение: формула (31) или равносильная;	0.4	
Обработка результатов измерений			7.5
2.4	Расчет периода:		1.0
	формула для периода;	0.2	
	численное значение периода, допустимая погрешность $\pm 0,01$;	0.2	
	формула для погрешности;	0.2	
	численное значение погрешности;	0.2	
	указана размерность;	0.1	
	правильное округление;	0.1	
2.5	Линеаризация:		3.2
	выбор переменных (допустимы равносильные переменные, выраженные через измеренные известные величины);	1.6	
	проведен расчет для всех точек (оценивается, если оценен выбор переменных); по 0.1 за каждую точку, допустимая погрешность ± 0.02 ;	1.1	
	Построение графика (оценивается, если оценен расчет точек):		
	оси подписаны и оцифрованы;	0.1	
	нанесены все точки;	0.2	
	проведена сглаживающая прямая;	0.2	
2.6	Расчет коэффициента трения качения:		3.3
	метод расчета коэффициента трения:		
	по коэффициенту наклона – 0.6;	0.6	
	по 1-2 точкам – 0.3;		
2.6	найден коэффициент наклона:		3.3
	по МНК – 0.5;	0.5	
	графически – 0.4;		

по двум точкам – 0.2; допустимая погрешность $\pm 0,05$;		
метод расчета погрешности;	0.2	
численное значение погрешности;	0.2	
формула для расчета трения качения (только через коэффициент наклона);	0.3	
численное значение коэффициента трения качения (оценивается, если оценена формула); правило распространения ошибок на численные значения не распространяется!	0.5	
формула для погрешности, учтены погрешности всех величин, входящих в формулу;	0.6	
численное значение погрешности;	0.2	
правильное округление;	0.2	
ВСЕГО	20.0	