№1. Ненулевые многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяют тождествам

$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0.$$

Докажите, что степени всех трёх многочленов чётны.

Решение. Пусть n — наибольшая из степеней данных трёх многочленов. Пусть a, b и c — коэффициенты при x^n в многочленах $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ соответственно (некоторые из этих чисел могут быть нулями).

Коэффициенты при x^n в многочлене $P(x)+Q(x)+R(x)$ и при x^{n^2} в многочлене $P(Q(x))+Q(R(x))+$ $+R(P(x))$ равны нулю, то есть

$$a+b+c=0 \qquad \text{и} \qquad ab^n+bc^n+ca^n=0. \tag{$*$}$$

Далее мы будем пользоваться только этими равенствами.

Из первого равенства вытекает, что хотя бы два из чисел a, b, c ненулевые. Если третье (скажем, c) равно нулю, то второе равенство выше неверно. Поэтому все три многочлена имеют степень n, и надо доказать, что n чётно.

Предположим противное. Без ограничения общности, числа a и b одного знака. Домножая, если надо, все три числа на -1 (что не меняет равенств $(*)$), будем считать, что $a, b>0$ и $c=-(a+b)<0$. Тогда $0<a, b<|c|$, и числа bc^n и ca^n отрицательны. Но в этом случае

$$|bc^n+ca^n|>|bc^n|=|c|\cdot b\cdot|c|^{n-1}>a\cdot b\cdot b^{n-1}=ab^n,$$

что противоречит второму равенству в $(*)$.

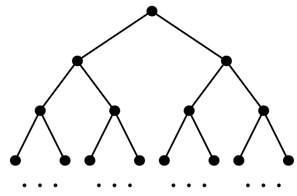
Итак, все три степени равны чётному числу n.

Критерии. *Баллы за разные части складываются!*

Часть 1: $\deg P=\deg Q=\deg R$.
Доказано, что все три степени многочленов равны — *2 балла.*
Доказано лишь, что две наибольших степени равны — *0 баллов.*

Часть 2; все степени чётны.
Доказано лишь, что наибольшая из степеней многочленов P, Q, R чётна — *5 баллов.*
Выписана лишь система $(*)$ без дальнейших содержательных продвижений — *1 балл вместо 5.*

№2. На плоскости нарисовано 10-этажное 2-дерево: отмечена вершина A_1, она соединена отрезками с двумя вершинами B_1 и B_2, каждая из которых соединена отрезками с двумя из четырех вершин C_1, C_2, C_3, C_4 (каждая из вершин C_i соединена ровно с одной вершиной B_j); и так далее вплоть до 512 вершин $J_1, \ldots, J_{512}$. Каждая вершина $J_1, \ldots, J_{512}$ покрашена в один из двух цветов: голубой или золотой. Рассматриваются всевозможные перестановки f множества вершин нарисованного дерева, такие что (i) если вершины X и Y были соединены отрезком, то вершины $f(X)$ и $f(Y)$ также соединены отрезком, и (ii) если вершина X была покрашена в какой-то цвет, то вершина $f(X)$ покрашена в тот же цвет. Для какого максимального M заведомо найдутся хотя бы M различных рассматриваемых перестановок?



Ответ: 2^{2^7}.

Решение. Для начала, введем удобную терминологию. Заметим, что аналогично определению 10-этажного 2-дерева (с покрашенными в два цвета листьями), данному в условии задачи, можно определить k-этажное 2-дерево для $1 \leqslant k$. Для удобства мы будем считать, что все отрезки между вершинами дерева ориентированы от меньшей буквы к большей. Номер буквы, которой помечена вершина дерева, будем называть *этажом* данной вершины (так, A_1 – единственная вершина первого этажа, B_1, B_2 – вершины второго, и т.д.), также будем говорить о множестве вершин, *доступных из вершины* X – вершинах, в которые можно прийти из X, идя по стрелкам.

Пусть на плоскости нарисованы два k-этажных 2-дерева с покрашенными листьями. Биекцию f из множества вершин первого дерева в множество вершин второго дерева будем называть *изоморфизмом* деревьев, если выполняются два условия: во-первых, если вершины X и Y были соединены отрезком в первом дереве, то вершины $f(X)$ и $f(Y)$ соединены отрезком во втором дереве, во-вторых, и если вершина X была покрашена в какой-то цвет в первом дереве, то вершина $f(X)$ покрашена в тот же цвет во втором дереве. В частном случае, когда в качестве первого и второго дерева взято одно и то же дерево, биекцию f будем называть *автоморфизмом* дерева. Через $\chi(k)$ обозначим минимальное количество автоморфизмов у k-этажного 2-дерева с покрашенными листьями (где минимум берется по всем возможным покраскам). На введенном языке в задаче требуется найти $\chi(10)$.

Начнем с почти очевидной леммы:

Лемма 1. *Изоморфизм деревьев сохраняет этаж вершины.*

Доказательство. Изоморфизм f не уменьшает степень вершины. В самом деле, для любой вершины X все ее соседи переходят в соседей вершины $f(X)$, значит у $f(X)$ соседей не меньше, чем было у X. Тогда по принципу Дирихле степень не может и увеличиваться. Значит, вершины последнего этажа переходят в вершины последнего этажа, поскольку только эти вершины имеют степень 1. Значит, вершины предпоследнего этажа переходят в вершины предпоследнего, поскольку должны остаться соседями соответствующих вершин с последнего этажа. И так далее.

Теперь мы готовы приступить к собственно решению задачи.

Первое доказательство оценку снизу, по индукции.

Предложение 1. *При любом $k \geqslant 2$ выполняется $\chi(k) \geqslant (\chi(k-1))^2$.*

Доказательство. Для k-этажного дерева подграф на вершинах, доступных из B_1 (включая саму B_1) является $k-1$-этажным деревом. Значит, есть хотя бы $\chi(k-1)$ различных автоморфизмов этого подграфа. Выберем один из них, обозначим его g. Аналогично для подграфа на вершинах, доступных из B_2 выберем автоморфизм h, это тоже можно сделать хотя бы $\chi(k-1)$ способами. Теперь рассмотрим следующее отображение вершин k-этажного дерева: вершины поддерева B_1 отобразим с помощью g, вершины поддерева B_2 – с помощью h, A отобразим в себя. Очевидно, мы получили автоморфизм: для $X = A$ условие выполняется, потому что B_1 и B_2 перешли в себя (по лемме о сохранении этажа), для X в одном из двух $k-1$-этажных поддеревьев условие выполняется, потому что g и h были автоморфизмами. Итак, упорядоченной паре (g, h) мы сопоставили автоморфизм f, притом разным парам соответствуют разные f, а таких пар минимум $(\chi(k-1))^2$.

Следствие 1. *Для $k \geqslant 3$ выполняется $\chi(k) \geqslant 2^{2^{k-3}}$.*

Доказательство. Докажем явным образом для $k = 3$, для больших значений k Предложение 1 дает в точности шаг индукции. Рассмотрим 3-этажное 2-дерево. Если для хотя бы одной из вершин B_1, B_2 две соединенные с ней вершины C покрашены в один цвет – то существует автоморфизм, переставляющий их и оставляющий все остальные вершины на месте, то есть автоморфизмов минимум 2 (еще один тождественный). Если для обеих вершин B_1, B_2 среди соединенных с ними вершин C есть одна голубая и одна золотая – есть автоморфизм, меняющий местами B_1 и B_2, и из подчиненным им вершин C переводящий голубую в голубую, а золотую в золотую – итого опять же минимум есть два автоморфизма с учетом тождественного.

Второе доказательство оценку снизу, без индукции.

Заметим, что для любого 3-этажного дерева, вершины которого покрашены в два цвета (напомним, у 3-этажного дерева 4 висячие вершины) существует хотя бы два автоморфизма, сохраняющие раскраску. Тогда заметим, что у n-этажного дерева при $n \geqslant 3$ есть 2^{n-3} вершин $n-2$-го уровня, из каждой из который доступно по стрелкам 3-этажное дерево. Тогда достаточно рассмотреть автоморфизмы, оставляющие на месте все вершины уровня $n-3$ и меньших, и как-то переставляющие вершины каждого из этих 3-этажных деревьев. Поскольку для каждого из таких деревьев есть хотя бы два автоморфизма, а таких поддеревьев 2^{n-3} – всего построено минимум $2^{2^{n-3}}$ автоморфизмов. $\square$

Осталось по индукции построить для каждого $k \geqslant 3$ покраску листьев k-этажного дерева, для которой у дерева будет ровно $2^{2^{k-3}}$ автоморфизмов. Здесь есть одна хитрость: как это иногда бывает, чтобы утверждение хорошо доказывалось по индукции его надо усилить.

Предложение 2. *При любом $k \geqslant 3$ найдутся три покраски $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ листьев k-этажного дерева, таких что деревья с этими покрасками попарно не изоморфны, и каждое имеет ровно $2^{2^{k-3}}$ автоморфизмов.*

Доказательство. База для $k = 3$. Будем считать, что B_1 соединена с C_1, C_2, соответственно B_2 – с C_3, C_4. Покраски C_1, C_2, C_3 – голубые, C_4 – золотая; C_1, C_2, C_3 – золотые, C_4 – голубая; наконец C_1, C_3 – голубые, C_2, C_4 – золотые. Очевидно, что деревья попарно неизоморфны, и автоморфизмов ровно 2.

Переход индукции. Пусть три покраски $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ для k-этажного дерева построены. Рассмотрим следующие покраски листьев $k+1$-этажного:

- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_1$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_2$;
- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_2$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_3$;
- листья, доступные из B_1 покрасим с помощью $\mathcal{M}_1$, доступные из B_2 – с помощью $\mathcal{M}_3$.

Очевидна как попарная неизоморфность, так и нужное количество автоморфизмов.

Комментарий к построению примера в духе второго доказательства оценки. Заметим, что фактически мы решали следующую задачу: построить такую раскраску висячих вершин $n-2$-этажного дерева в три цвета, чтобы только тождественный автоморфизм сохранял покраску. В самом деле: есть три взаимно-неизоморфных покраски 3-этажного дерева в два цвета, таких что покраска имеет лишь два автоморфизма. Тогда мы хотим, чтобы в покраске n-этажного дерева покраска каждого 3-этажного поддерева, доступного из какой-то вершины $n-2$-го уровня, была одной из этих трех покрасок. Тип этой покраски припишем соответствующей вершине $n-2$-го уровня – получили покраску вершин $n-2$-этажного дерева в 3 цвета. Мы всего лишь хотим от этой покраски, чтобы она не имела автоморфизмов кроме тождественного.

Схема оценки.

1. Ответ: .... **1 балл**

2. Лемма 1: .... **0 баллов**

(за отсутствие доказательства леммы 1 баллы не снимаются)

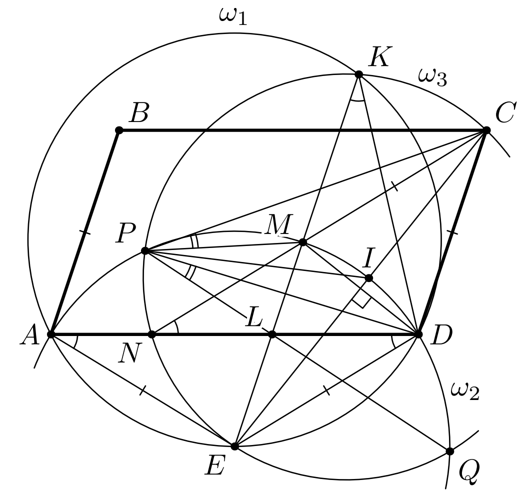
3. Пример и оценка: .... **по 3 балла**

(ни то, ни другое не суммируется с (1))

№3. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A на отрезке AD отмечена точка N, а на отрезке CN — точка M так, что $AB = BM = CM$. Точка K симметрична точке N относительно прямой MD. Прямая MK пересекает отрезок AD в точке L. Пусть P — общая точка описанных окружностей треугольников AMD и CNK, причем точки A и P лежат по одну сторону от прямой MK. Докажите, что $\angle CPM = \angle DPL$.

Решение. Так как $CM = AB = CD$, треугольник CMD равнобедренный. Поэтому $\angle CDM + \angle DMK = \angle CMD + \angle DMN = 180°$, то есть $MK \parallel CD$.

Пусть точка E симметрична точке C относительно прямой MD. Тогда четырехугольники $DCME$ и $ABME$ — ромбы с равными сторонами, так как $ME \parallel CD \parallel AB$ и $ME = MC = CD = AB = BM$. Поскольку $MK \parallel CD$, получаем, что E лежит на прямой KL. Учитывая, что $AE = DE$, имеем $\angle DKE = \angle DKM = \angle DNM = \angle NDE = \angle NAE$. Поэтому четырехугольник $AEDK$ вписан в некоторую окружность ω_1.



Обозначим через ω_2 и ω_3 описанные окружности треугольников AMD и CNK соответственно (поскольку $AE = DE = ME$, точка E является центром ω_2). Из симметрии относительно MD получаем. что $CKNE$ — равнобокая трапеция, поэтому точка E лежит на ω_3. Пусть ω_2 и ω_3 во второй раз пересеклись в точке Q. Точка $L = AD \cap KE$ — радикальный центр окружностей ω_1, ω_2 и ω_3, поэтому L лежит на прямой PQ.

Пусть луч EC пересекает ω_2 в точке I. Тогда дуги IM и ID в окружности ω_2 равны, то есть I лежит на биссектрисе угла DPM. Но I также лежит на биссектрисе угла CPQ, так как $\angle QPI = \angle QEI/2 = \angle QEC/2 = \angle QPC/2$. Следовательно, прямые PM и PD симметричны относительно биссектрисы угла QPC, откуда и следует $\angle CPM = \angle DPL$.

Замечание 1. В треугольнике CPQ точки M и D изогонально сопряжены, а точка I является центром вписанной окружности.

Замечание 2. Точка M является точкой пересечения биссектрис треугольника AKD.

Схема оценки.

Недоведенное счетное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.): .... **0 баллов**

Частичные баллы.

Приведённые ниже баллы могут складываться друг с другом.

Через Q обозначается вторая точка пересечения окружностей (AMD) и (CNK).

1. Доказано, что $MK \parallel CD$: .... **1 балл**
2. Доказано, что $AEDK$ — вписанный четырехугольник: .... **2 балла**
3. Доказано, что L лежит на прямой PQ: .... **1 балл**
4. Утверждение задачи выведено из того факта, что L лежит на PQ .... **3 балла**