XVIII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 16 february 2022

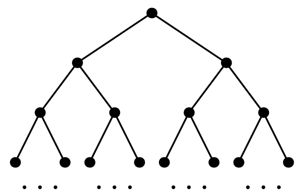
First day
(Time allowed is 4.5 hours. Each problem is worth 7 points)

№1. Non-zero polynomials $P(x)$, $Q(x)$, and $R(x)$ with real coefficients satisfy the identities

$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0.$$

Prove that the degrees of the three polynomials are all even.

№2. A ten-level 2-tree is drawn in the plane: a vertex A_1 is marked, it is connected by segments with two vertices B_1 and B_2, each of B_1 and B_2 is connected by segments with two of the four vertices C_1, C_2, C_3, C_4 (each C_i is connected with one B_j exactly); and so on, up to 512 vertices $J_1, \ldots, J_{512}$. Each of the vertices $J_1, \ldots, J_{512}$ is coloured blue or golden. Consider all permutations f of the vertices of this tree, such that (i) if X and Y are connected with a segment, then so are $f(X)$ and $f(Y)$, and (ii) if X is coloured, then $f(X)$ has the same colour. Find the maximum M such that there are at least M permutations with these properties, regardless of the colouring.



№3. In parallelogram $ABCD$ with acute angle A a point N is chosen on the segment AD, and a point M on the segment CN so that $AB=BM=CM$. Point K is the reflection of N in line MD. The line MK meets the segment AD at point L. Let P be the common point of the circumcircles of AMD and CNK such that A and P share the same side of the line MK. Prove that $\angle CPM = \angle DPL$.

XVIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 16 февраля 2022 года

Первый день

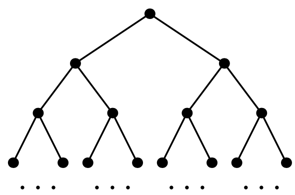
(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.)

№1. Ненулевые многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с вещественными коэффициентами удовлетворяют тождествам

$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0.$$

Докажите, что степени всех трёх многочленов чётны.

№2. На плоскости нарисовано 10-этажное 2-дерево: отмечена вершина A_1, она соединена отрезками с двумя вершинами B_1 и B_2, каждая из которых соединена отрезками с двумя из четырех вершин C_1, C_2, C_3, C_4 (каждая из вершин C_i соединена ровно с одной вершиной B_j); и так далее вплоть до 512 вершин $J_1, \ldots, J_{512}$. Каждая вершина $J_1, \ldots, J_{512}$ покрашена в один из двух цветов: голубой или золотой. Рассматриваются всевозможные перестановки f множества вершин нарисованного дерева, такие что (i) если вершины X и Y были соединены отрезком, то вершины $f(X)$ и $f(Y)$ также соединены отрезком, и (ii) если вершина X была покрашена в какой-то цвет, то вершина $f(X)$ покрашена в тот же цвет. Для какого максимального M заведомо найдутся хотя бы M различных рассматриваемых перестановок?



№3. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A на отрезке AD отмечена точка N, а на отрезке CN — точка M так, что $AB = BM = CM$. Точка K симметрична точке N относительно прямой MD. Прямая MK пересекает отрезок AD в точке L. Пусть P — общая точка описанных окружностей треугольников AMD и CNK, причем точки A и P лежат по одну сторону от прямой MK. Докажите, что $\angle CPM = \angle DPL$.

Математикадан халықаралық XVIII Жәутіков олимпиадасы
Алматы, 16 ақпан 2022 жыл

Бірінші күн

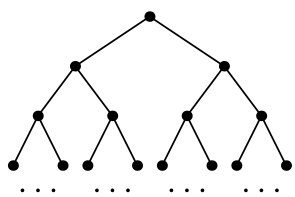
(Жұмысты орындау уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№1. Коэффициенттері нақты сандар болатын, нөлдік емес $P(x)$, $Q(x)$ және $R(x)$ көпмүшелері үшін

$$P(x)+Q(x)+R(x)=P(Q(x))+Q(R(x))+R(P(x))=0$$

тепе-теңдігі орындалады. Осы үш көпмүшенің әрқайсысының дәрежесі жұп сан екенін дәлелдеңіз.

№2. Жазықтықта 10 қабатты 2-ағашы (2-дерево) салынған. Осы ағашта A_1 нүктесі белгіленген және осы нүкте B_1 және B_2 нүктелерімен кесіндімен қосылған. B_1 және B_2 нүктесінің әрқайсысы C_1, C_2, C_3, C_4 нүктелерінің екеуімен кесіндімен қосылған (әр C_i нүкте дәл бір B_j нүктемен қосылған); …, осылай кете бере қосылулар $J_1, \ldots, J_{512}$ нүктелеріне дейін орындалған. $J_1, \ldots, J_{512}$ нүктелерінің әрқайсысы екі түстің біреуіне боялған: көк түс немесе алтын түс. Келесі заңдылықтармен анықталған, салынған ағаштың төбелерінің барлық мүмкін f орын ауыстыруларын қарастырайық: (i) егер X және Y төбелері кесіндімен қосылса, онда $f(X)$ және $f(Y)$ төбелері де кесіндімен қосылған; (ii) егер X төбесі қандай да бір түске боялса, онда $f(X)$ төбесі де дәл сол түске боялған. M санының қандай ең үлкен мәнінде, кепілді түрде кем дегенде M әртүрлі (қарастырып отырылған) орын ауыстырулар табылады?



№3. $ABCD$ параллелограмында $\angle A < 90^\circ$. AD кесіндісінде N, ал CN кесіндісінде M нүктесі $AB = BM = CM$ болатындай белгіленген. K нүктесі N нүктесіне MD түзуіне қарағандағы симметриялы нүкте. MK түзуі AD кесіндісін L нүктеде қияды. P нүктесі — AMD және CNK үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлердің ортақ нүктесі болсын, және де A және P нүктелері MK түзуінің бір жағында жатыр. $\angle CPM = \angle DPL$ теңдігін дәлелдеңіз.