*Математикадан халықаралық XVII Жәутіков олимпиадасы*
*Алматы, 2021 жыл, 9 қаңтар, екінші күн*
(Жұмыс уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

**№4.** $ABC$ үшбұрышына радиусы $r$ болатын шеңбер іштей сызылған. Радиустары $r_1$, $r_2$, $r_3$ болатын шеңберлер ($r_1, r_2, r_3 < r$) сәйкесінше $A$, $B$, $C$ бұрыштарына іштей сызылған және әр шеңбер $\triangle ABC$-ға іштей сызылған шеңберді сырттай жанайды. $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant r$ теңсіздігін дәлелдеңіз.

**№5.** Сауық кешке 99 қонақ келді. Кешті ойын түрде Анна және Боб тамадалары жүргізеді (тамадалар қонақтардың құрамына кірмейді). Шеңбер бойымен 99 орындық қойылған; бастапқыда барлық қонақтар орындықтардың айналасында жүреді. Тамадалар кезектесіп жүреді.

Тамада өзінің жүрісінде тұрып тұрған қонақты таңдайды да, оған бос тұрған $c$ орындықты көрсетеді, сол кезде қонақ сол орындыққа отыруы керек; ал егер $c$ орындығына көрші екі орындықтардың кемінде біреуі бос емес болса, онда сол тамада $c$-ға көрші бос емес орындықта отырған қонақтың орындықтан тұрып кетуіне бұйрық береді (егер екі орындық та бол болмаса, онда тамада екі орындықтың біреуін таңдайды). Сол кезде бұйрықтар мезетте орындалады.

Жүрісті Анна бастайды; оның мақсаты — оның қандай да бір жүрісінен кейін кемінде $k$ орындық бос болмауы керек. $k$-ның қандай ең үлкен мәнінде, Боб қалай ойнамаса да, Анна өз мақсатына жете алады?

**№6.** Тұрақты емес $P(x)$ көпмүшесінің дәрежесі $n$-ге тең, ал коэффициенттері рационал сандар. Сонымен қатар $P(x)$ көпмүшесін коэффициенттері рационал болатын екі (тұрақты емес) көпмүшенің көбейтіндісі түрінде келтіруге болмайды. $P(Q(x))$ көпмүшесі $P(x)$ көпмүшесіне бөлінетіндей, коэффициенттері рационал сандар болатын ал дәрежесі $n$-нен кіші $Q(x)$ көпмүшелерінің саны

а) шекті екенін;

б) $n$-нен аспайтынын

дәлелдеңіз.

*XVII Международная Жаутыковская олимпиада по математике*
*Алматы, 2021, 9 января, второй день*
(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов)

**№4.** В треугольник $ABC$ вписана окружность радиуса $r$. Окружности с радиусами $r_1$, $r_2$, $r_3$ (здесь $r_1, r_2, r_3 < r$) вписаны в углы $A$, $B$, $C$ соответственно так, что каждая из них касается вписанной окружности внешним образом. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant r$.

**№5.** На вечеринку пришли 99 гостей. Двое ведущих вечеринки, Анна и Боб, играют в следующую игру (ведущие не входят в число гостей). По кругу расставлены 99 стульев; изначально все гости ходят вокруг стульев. Ведущие делают ходы по очереди. За ход ведущий выбирает стоящего гостя и указывает ему свободный стул $c$, на который тот должен сесть; если хотя бы один стул, соседний с $c$, занят, то тот же ведущий велит одному гостю на стуле, соседнем с $c$, встать (если оба стула, соседних с $c$, заняты, ведущий выбирает один из них). Все указания исполняются немедленно. Анна ходит первой; её цель — добиться, чтобы после какого-то её хода хотя бы $k$ стульев были заняты. При каком наибольшем $k$ Анна может добиться цели, как бы ни действовал Боб?

**№6.** Пусть $P(x)$ – непостоянный многочлен степени $n$ с рациональными коэффициентами, который нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с рациональными коэффициентами. Докажите, что количество многочленов $Q(x)$ с рациональными коэффициентами, степени, меньшей $n$, таких, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$,

а) конечно;

б) не превосходит $n$.