Математикадан халықаралық XVII Жәутіков олимпиадасы
Алматы, 2021 жыл, 8 қаңтар, бірінші күн
(Жұмыс уақыты 4,5 сағат. Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№1. Қандай да бір натурал n саны үшін 3^n санын 2^n санына бөлгенде, қалдық 10^{2021} санынан үлкен болатынын дәлелдеңіз.

№2. Іштей сызылған дөңес $ABCDEF$ төртбұрышында $BC = EF$ және $CD = AF$. AC және BF диагоналдары Q нүктесінде, ал EC және DF диагоналдары P нүктесінде қиылысады. DF және BF кесінділерінде сәйкесінше R және S нүктелері $FR = PD$ және $BQ = FS$ болатындай белгіленген. RQ және PS **кесінділері** T нүктесінде қиылысады. TC түзуі DB диагоналін қақ ортасынан бөлетінін дәлелдеңіз.

№3. $n \geqslant 2$ натурал саны берілген. Элвинде өлшемі $n \times n$ тақта бар. Сол тақтаның әр шаршысына нақты бір сан жазылған. n шаршыдан құралған жиынды *ладьялы жиын* деп атайық, егер осы шаршылар әртүрлі қатарларда және әртүрлі бағандарда орналасса. Кез келген ладьялы жиындағы сандардың қосындысы теріс емес болсын.

Бір жүрісте Элвин нақты a санын, қандай да бір қатарды, қандай да бір бағанды таңдап алып, сосын таңдалған қатардағы әр санға a санын қосады, ал таңдалған әр бағандағы саннан a санын азайтады (яғни таңдалған қатар мен бағанның қиылысындағы сан өзгермейді). Бірнеше жүріс ішінде, Элвин тақтадағы барлық сандар теріс емес болатындай жүріс жасай алатынын дәлелдеңіз.

XVII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2021, 8 января, первый день
(Время выполнения работы 4,5 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов)

№1. Докажите, что при некотором натуральном n остаток от деления 3^n на 2^n больше 10^{2021}.

№2. Дан выпуклый вписанный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $BC = EF$ и $CD = AF$. Диагонали AC и BF пересекаются в точке Q, а диагонали EC и DF — в точке P. На отрезках DF и BF отмечены точки R и S соответственно так, что $FR = PD$ и $BQ = FS$. **Отрезки** RQ и PS пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TC делит диагональ DB пополам.

№3. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. У Элвина есть таблица $n \times n$, заполненная вещественными числами (в каждой клетке записано ровно одно число). Назовём *ладейным множеством* множество из n клеток, расположенных как в n различных столбцах, так и в n различных строках. Предположим, что сумма чисел в клетках любого ладейного множества неотрицательна.

За ход Элвин выбирает строку, столбец, а также вещественное число a; к каждому числу в выбранной строке он прибавляет a, а из каждого числа в выбранном столбце — вычитает a (таким образом, число в пересечении строки и столбца не изменяется). Докажите, что Элвин может, сделав несколько ходов, добиться, чтобы все числа в таблице стали неотрицательными.