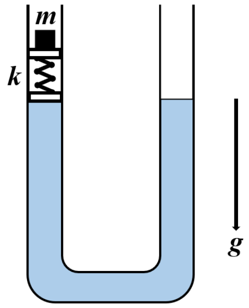
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
8 января 2021 года

Задача 1 (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1.1 (4.0 балла)

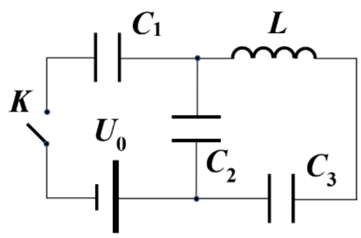


В вертикальную U-образную трубку малого постоянного сечения $s = 8.00 см^2$ налита вода плотностью $\rho = 1.00 г/см^3$, общая длина которой в обоих коленах составляет $l = 50.0 см$. В одно колено трубки помещают два поршня, между которыми имеется пружина жесткости $k = 1.00 Н/м$. Поршни воду не пропускают и могут скользить по трубке без трения. В начальный момент на верхний поршень ставят груз массой $m = 10.0 г$. Определите возможные частоты малых гармонических колебаний системы возле нового положения равновесия. Массой поршней и пружины можно пренебречь, ускорение свободного падения равно $g = 9.80 м/с^2$. Воду считайте идеальной несжимаемой жидкостью.

Задача 1.2 (3.0 балла)

Некоторые насекомые, такие как водомерки, могут свободно перемещаться по поверхности воды, так как их лапки густо покрыты несмачиваемыми волосками. Чтобы понять, как это возможно, рассмотрим следующую модельную задачу. Квадратную пластинку со стороной $a = 10.0$см и толщиной $h = 2.00 мм$ осторожно положили на водную поверхность. Плотность материала пластинки равна $\rho = 1.10 г/см^3$, плотность воды равна $\rho_0 = 1.00 г/см^3$, а ее поверхностное натяжение составляет $\sigma = 7.30 \cdot 10^{-2} Н/м$. Найдите максимальную массу груза m, которую можно поставить на пластинку, чтобы она не утонула. Считайте, что под весом груза пластинка не прогибается, ускорение свободного падения равно $g = 9.80 м/с^2$.

Задача 1.3 (3.0 балла)



Из трех конденсаторов с емкостями C_1, C_2 и C_3 соответственно, катушки индуктивностью L и источника постоянного напряжения U_0 собрана представленная на рисунке схема. В начальный момент времени конденсаторы не заряжены, а ток в катушке равен нулю. Ключ K замыкают. Найдите максимальный ток через катушку $I_{\max}$ и определите минимальное напряжение $U_{\min}$ на конденсаторе C_2. Сопротивление соединительных проводов считать малым.

Задача 2. Термодинамика однокомпонентной плазмы (10.0 балла)

Плазма считается четвертым состоянием вещества и представляет собой ионизованный газ, содержащий электроны, ионы и нейтральные частицы. В плазме концентрации частиц и температура изменяются в очень широких пределах, так что в ней существенную роль могут играть самые разнообразные физические эффекты. Поэтому в настоящее время разработано большое количество моделей плазмы и в этой задаче речь пойдет об одной из них, которая называется моделью однокомпонентной среды. Именно, рассмотрим полностью ионизованную плазму, в которой отсутствуют нейтральные частицы, и которая состоит из положительно заряженных ядер дейтерия, движущихся на однородно заряженном по объему нейтрализующем фоне, образуемом электронами. Такая модель является очень хорошим приближением для плазмы сверхвысоких давлений, реализующихся в центре белых карликов и планет-гигантов типа Юпитера. Пусть заряд ядер дейтерия и их масса равны $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,Кл$ и $m = 3.44 \cdot 10^{-24}\,г$, а их концентрация составляет $n = 1{,}62 \cdot 10^{27}\,см^{-3}$ при температуре $T = 1.76 \cdot 10^{4}\,K$. При данных условиях существенную роль играет взаимодействие между ядрами дейтерия, которые располагаются в узлах кубической решетки, двумерная проекция которой показана на рисунке 2.1. Плазма в целом является нейтральной, поэтому каждый кубик с расположенным в центре ядром является незаряженным и называется элементарной ячейкой. Поле, создаваемое каждой кубической ячейкой, является очень сложным, и вместо этого рассматривают сферические ячейки, двумерная проекция которых показана на рисунке 2.2. Возможность такой замены не является очевидной и зависит от типа рассматриваемых задач.

В численных расчетах считайте известными значения следующих постоянных: постоянная Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,Дж/K$, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,Ф/м$.

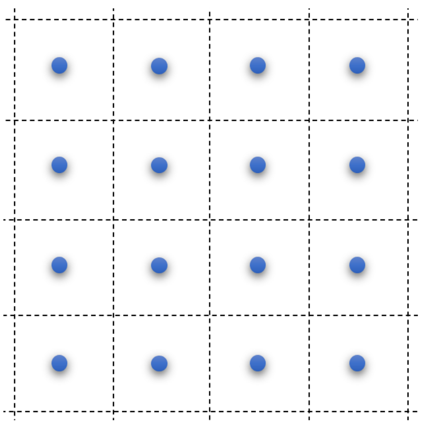


Рисунок 2.1. Двумерная проекция однокомпонентной модели плазмы с кубическими ячейками.

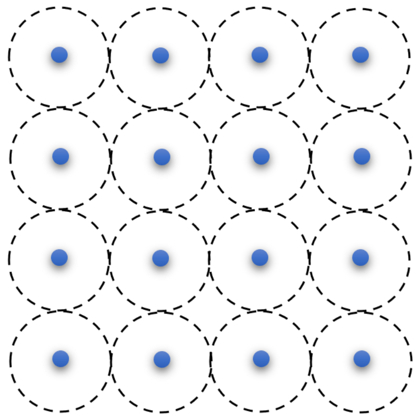


Рисунок 2.2. Двумерная проекция однокомпонентной модели плазмы со сферическими ячейками.

2.1 Рассчитайте наименьшее расстояние a между соседними ядрами.

2.2 Покажите, что энергия ядер играет существенную роль в данных условиях. Для этого оцените отношение Γ энергии взаимодействия соседних ядер к их тепловой энергии. Наличием нейтрализующего фона пренебречь.

2.3 Рассчитайте объемную плотность заряда ρ сферической ячейки в однокомпонентной модели плазмы.

2.4 Рассчитайте разность потенциалов между двумя точками сферической ячейки, расположенными на расстоянии $a/2$ и $a/4$.

2.5 Рассчитайте частоту малых колебаний ядер ω_p возле положения равновесия в сферической ячейке.

2.6 При заданной температуре плазмы оцените среднеквадратичную амплитуду A колебаний ядер вблизи положения их равновесия.

2.7 Внутренняя энергия U однокомпонентной плазмы объемом V, содержащей N сферических ячеек, имеет вид

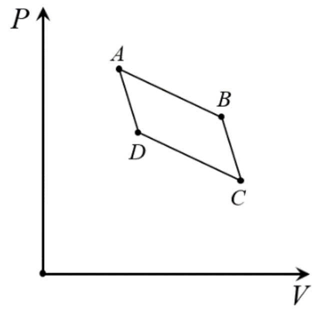
$$U = \alpha_1 N + \alpha_2 \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}}.$$

Найдите постоянные α_1 и α_2.

Плазменное состояние вещества является перспективным рабочим телом для осуществления управляемой реакции ядерного синтеза. Основная проблема в осуществлении ядерного синтеза заключается в преодолении кулоновского отталкивания между положительно заряженными ядрами, называемого кулоновским барьером. Наличие у ядер нейтрализующего фона приводит к снижению кулоновского барьера, так как уменьшается сила отталкивания между ядрами. Рассмотрим процесс слияния двух ячеек, который происходит следующим образом. Две ячейки сливаются в одну сферическую ячейку с той же самой величиной объемной плотности нейтрализующего фона, а в центре появляется новое ядро, образованное слиянием двух исходных ядер.

2.8 Рассчитайте снижение кулоновского барьера δU_c для слияния двух ячеек ядер дейтерия при заданных условиях.

Выражение для внутренней энергии однокомпонентной плазмы в ячеечной модели п. 2.7 интересно тем, что оно явно зависит от объема, что характерно для неидеальных систем. Пусть термодинамическое состояние системы, состав которой остается неизменным, изображается точкой на диаграмме давление (P) – объем (V). Рассмотрим на этой диаграмме процесс $ABCD$, состоящий из двух изотерм AB и CD, а также двух адиабат BC и AD. Изменения объемов, температур и давлений в данном процессе будем рассматривать настолько малыми, что четырехугольник $ABCD$ можно считать параллелограммом.



2.9 Используя приведенный выше цикл, выразите производную внутренней энергии по объему при фиксированной температуре $(\partial U / \partial V)_T$ через производную давления по температуре при фиксированном объеме $(\partial P / \partial T)_V$, а также температуру T и давление P системы.

2.10 Давление P однокомпонентной плазмы объемом V, содержащей N сферических ячеек, имеет вид

$$P = \beta_1 \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V}\right)^{\beta_3}.$$

Найдите постоянные β_1, β_2 и β_3. Рассчитайте численное значение давления при заданных в условии задачи значениях параметров плазмы.

Задача 3. Оптический волновод (10.0 баллов)

В настоящее время для передачи энергии и информации широко используются различные волноводы. Распространение электромагнитных волн в волноводах существенно отличается от распространения волн в свободном пространстве и в данной задаче вам необходимо описать распространение электромагнитных волн в простейшем плоском волноводе.

Описание волн

Плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси Ox, описывается функцией

$$\vec{E}(t,x)=\vec{E}_0\cos(\omega t-kx+\varphi). \qquad (1)$$

Здесь $\vec{E},\vec{E}_0$ – напряженность электрического поля волны и его амплитуда соответственно, величина k называется волновым числом, ω – круговая частота волны, φ – начальная фаза, а величина под косинусом носит название фазы волны.

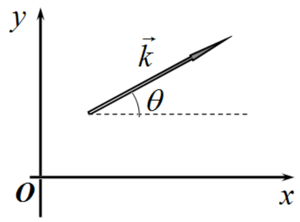
3.1 Выразите волновое число k через длину волны λ, а период колебаний T через угловую частоту ω.

3.2 Выразите скорость распространения волны c через величины k и ω.

В общем случае плоская монохроматическая волна описывается функцией

$$\vec{E}(t,\vec{r})=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi). \qquad (2)$$

В данном выражении $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства, $\vec{k}$ – волновой вектор, равный по модулю волновому числу и указывающий направление распространения волны.

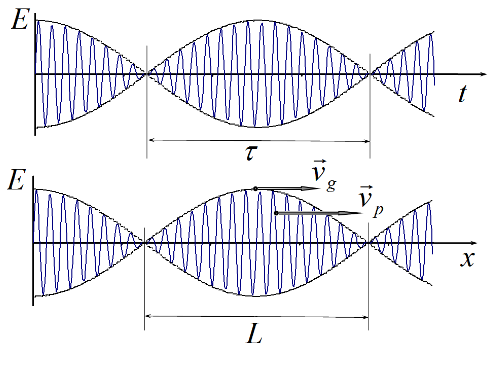


Пусть волновой вектор $\vec{k}$ лежит в плоскости Oxy и направлен под углом θ к оси Ox, как показано на рисунке справа.

3.3 Нарисуйте схематически семейство эквидистантных волновых поверхностей, то есть поверхностей равной фазы колебаний, для плоской волны, описываемой функцией (2).

3.4 Запишите явное выражение для напряженности электрического поля волны (2), как функцию координат $\vec{E}(t,x,y)$.

Идеальная монохроматическая волна бесконечна во времени и пространстве, поэтому она не может нести информацию. Для передачи информации необходимо использовать либо отдельные импульсы (ограничивать волну во времени) или изменять амплитуду волны (модулировать волну). В этих случаях волна перестает быть монохроматической, и ее можно представить в виде суммы (суперпозиции) монохроматических волн.



Рассмотрим волну, являющуюся суммой двух волн, распространяющихся вдоль оси Ox: первая с круговой частотой ω_0 и волновым числом k_0; частота второй волны равна $\omega_0+\Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$, а ее волновое число – $k_0+\Delta k, \Delta k \ll k_0$. Заметим, что в общем случае волновое число является некоторой функцией от частоты $k(\omega)$.

3.5 Покажите, что сумма двух этих монохроматических волн представляет собой модулированную волну, состоящую из отдельных волновых пакетов. Запишите формулу, описывающую медленное изменение амплитуды волны $A_0(x,t)$ в пространстве и времени (ее огибающую).

3.6 Определите длительность τ отдельного волнового пакета. Запишите соотношение между длительностью τ и разностью частот $\Delta\nu=\Delta\omega/2\pi$.

3.7 Определите пространственную длину волнового пакета L.

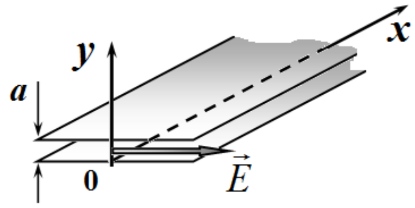
Оказывается, что скорости движения волновой поверхности постоянной фазы v_p, которая называется фазовой скоростью, отличается от скорости движения волнового пакета v_g, которая называется групповой скоростью. В качестве групповой скорости можно рассматривать скорость движения какого-либо максимума огибающей.

3.8 Найдите фазовую скорость v_p рассматриваемой модулированной волны и выразите ее через $\omega, k, \Delta\omega, \Delta k$.

3.9 Найдите групповую скорость v_g рассматриваемой модулированной волны и выразите ее через $\omega, k, \Delta\omega, \Delta k$.

3.10 Установите связь между фазовой v_p и групповой v_g скоростями для электромагнитных волн в вакууме.

Плоский волновод



В данной части рассмотрим распространение электромагнитных волн в плоском волноводе. Волновод образован двумя бесконечными параллельными проводящими пластинами, находящимися на расстоянии a друг от друга. Считайте, что между пластинами находится вакуум.

Будем рассматривать электромагнитные волны, вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ которых направлен параллельно пластинам (их называют TE-волны). Введем систему координат, ось Ox которой лежит на одной из пластин, а ось Oy направлена перпендикулярно пластинам.

Волна, распространяющаяся между пластинами вдоль оси Ox, описывается функцией

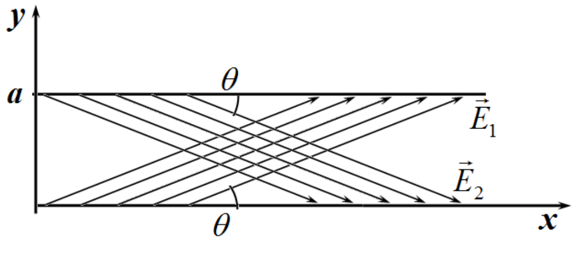
$$E(t,x,y) = E_0 \cos(\omega t - k_x x)\sin(k_y y), \tag{3}$$

где ω – заданная круговая частота волны. Чтобы эта волна могла распространяться в волноводе без потерь энергии, необходимо, чтобы напряженность поля на пластинах обращалась в ноль.

3.11 Найдите значения k_y, при которых волна может распространяться в волноводе без потерь энергии.

Набор возможных значений k_y является дискретным и характеризуется некоторым целым числом m. Волны, соответствующие различным значениям этого числа, называются модами (типами возможных волн).

3.12 Покажите, что волна, описываемая функцией (3), может быть представлена в виде суперпозиции двух плоских волн $E_1(t,x,y)$ и $E_2(t,x,y)$ с волновыми числами k_0, распространяющихся симметрично под углами $\pm\theta$ к пластинам, смотрите рисунок внизу.



3.13 Выразите значения величин k_x, k_y через волновое число волны k_0 и угол θ.

3.14 Определите возможные углы θ_m, при которых волна может распространяться в волноводе без потерь энергии. Выразите значения этих углов через расстояние между пластинами a и длину волны λ в вакууме.

3.15 Определите фазовые скорости v_p волн каждой моды. Выразите эти скорости через частоту волны ω и скорость света в вакууме c.

На вход волновода подаются короткие импульсы длительностью τ с несущей частотой ω_0. Так как эти импульсы имеют конечную длительность, то они не является монохроматической волной, а содержат набор монохроматических компонент в некотором диапазоне частот $\Delta\omega \ll \omega_0$. Эти входные импульсы формируют набор импульсов в каждой из возможных мод волновода.

3.16 Определите скорость распространения этого импульса в моде номер m.

3.17 На каком минимальном расстоянии X от входа в волновод число импульсов удвоится, если $a/\lambda = 1.2$. Ответ выразите через скорость света c и длительность импульса τ.

Чтобы избежать появления «лишних» импульсов при передаче информации, используют работающие в одномодовом режиме волноводы, в которых может распространяться только одна мода.

3.18 Найдите отношения a/λ, при которых в волноводе может распространяться только одна мода.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ где } n - \text{целое число}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}x^2, \text{ для } x \ll 1 \text{ и любых } \gamma$$