9 января 2021 года

# КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ:

# Математический маятник или какой угол считать малым…

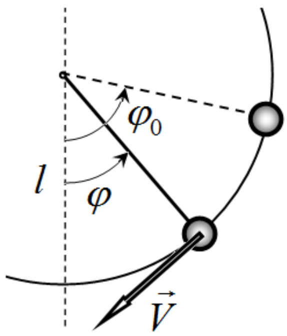
В своей основе физика является наукой экспериментальной и в этом ее сила. Однако без осмысления большого количества опытных фактов физика выродилась бы в описание огромного количества явлений и процессов. Так появились физические законы и соответствующие им модели, которые абстрагируются от несущественных черт рассматриваемого предмета. В последние десятилетия отмечается бурный прогресс в такой области как компьютерное моделирование или, как стало общепринято говорить, компьютерный эксперимент. Дело в том, что разработанные физические модели можно напрямую реализовать в виде вычислительного процесса на компьютере и исследовать интересуемые закономерности. В данной работе мы с вами выполним такой компьютерный эксперимент для хорошо известной системы как математический маятник.

Хорошо известна формула для периода колебаний математического маятника длины $l$, находящегося в однородном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения $g$. Однако, эта формула применима только при малых углах отклонения. Основной вопрос, на который вам предстоит ответить при выполнении этой работы: ***«Какой угол отклонения можно считать малым?»***

В учебной литературе, посвященной лабораторным практикумам, можно встретить указание о том, что максимальный угол отклонения не должен превышать $1°$, $2°$, $5°$ и т. д. На поставленный выше вопрос вы должны ответить на основании компьютерного эксперимента! А именно, вам предлагается изучить зависимость периода колебаний математического маятника от его амплитуды, в качестве которой принимается максимальный угол отклонения от вертикали.

Схема проведения и обработки результатов компьютерного эксперимента мало отличаются от проведения обычного, натурного эксперимента. Поэтому части данной задачи напрямую соответствуют основным этапам реального физического эксперимента.

## 1. Построение теоретической модели.




Рассмотрим математический маятник, представляющий собой небольшой массивный шарик, подвешенный на нерастяжимой нити длиной $l$. Маятник находится в поле тяжести с ускорением свободного падения $g$. Сопротивлением воздуха будем пренебрегать.

**1.1** Запишите формулу для периода $T$ малых колебаний математического маятника.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ угол отклонения нити от вертикали составляет $\varphi_0$, а начальная скорость шарика равна нулю. Шарик движется по дуге окружности, поэтому его положение будем определять углом отклонения нити от вертикали $\varphi$, а скорость изменения этого угла определяется угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

**1.2** Получите точную формулу для зависимости угловой скорости движения маятника от угла отклонения $\omega(\varphi)$ при заданной амплитуде колебаний $\varphi_0$ и известных значениях $l, g$.

Так как движение маятника является симметричным относительно вертикали, то для расчета периода колебаний достаточно рассчитать время $t_1$ его движения от максимального отклонения $\varphi_0$ до нуля.

**1.3** Запишите точное выражение для расчета времени $t_1$ по известной зависимости угловой скорости от угла отклонения $\omega(\varphi)$.

**1.4** Выразите период колебаний $T$ через время $t_1$.

В компьютерном эксперименте при выполнении расчетов никогда не используются реальные размерные величины, так как они могут иметь самые разные порядки и являются крайне неудобными. Обычно применяют так называемую процедуру обезразмеривания величин на некоторые характерные для данной задачи значения. Например, в нашей задаче характерным временем является период колебаний, поэтому удобно ввести безразмерное время $\tau$, которое определяется по формуле:

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

**1.5** Запишите формулу, связывающую угловую скорость в безразмерных единицах $\widetilde{\omega} = \dfrac{d\varphi}{d\tau}$ с ранее введенной угловой скоростью $\omega$.

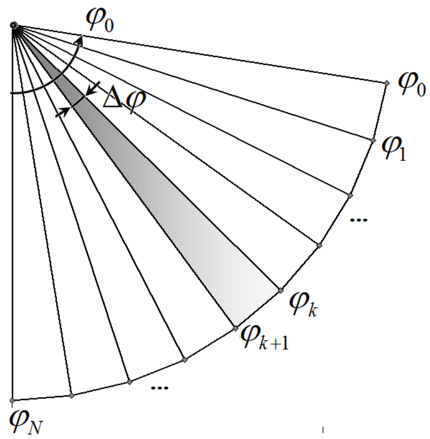
**1.6** Определите период малых колебаний $\widetilde{T}$ математического маятника в безразмерных единицах времени.

**1.7** Определите зависимость угловой скорости $\widetilde{\omega}$ от угла отклонения $\varphi$: $\widetilde{\omega}(\varphi)$.

***ВНИМАНИЕ! Далее везде используются введенные безразмерные величины: время $\tau$, период $\widetilde{T}$ и угловую скорость $\widetilde{\omega}$, которые будем обозначать $t$, $T$ и $\omega$.***

## 2. Конструирование экспериментальной установки, планирование эксперимента.

В компьютерном эксперименте этому этапу соответствует разработка алгоритма проведения расчетов. В данном случае основная идея численных (компьютерных) расчетов заключается в разбиении траектории движения на малые участки, на каждом из которых движение описывается приближенно.




Разобьем интервал движения от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = 0$ на $N$ одинаковых интервалов шириной $\Delta\varphi$. Обозначим точки разбиения как $\varphi_k$, $k = 0, 1, ...N$, а угловые скорости в этих точках как $\omega_k$. Основное приближение, используемое в дальнейших расчетах, состоит в том, что на каждом интервале от $\varphi_k$ до $\varphi_{k+1}$ движение маятника считается равноускоренным. Естественно ожидать, что с увеличением числа интервалов разбиения $N$ точность расчетов будет возрастать.

В рамках сделанного приближения не сложно найти время движения маятника на интервале от $\varphi_0$ до 0. Алгоритм расчетов при заданных вами значениях амплитуды $\varphi_0$ и числа интервалов разбиения $N$ раскрывается в последовательности ответов на следующие вопросы.

**2.1** Определите интервал разбиения $\Delta\varphi$.

**2.2** Определите координаты точек разбиения $\varphi_k$.

**2.3** Выразите угловую скорость $\omega_k$ в точке $\varphi_k$ при произвольном начальном угле отклонения $\varphi_0$. Запишите эту формулу для частного случая $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

**2.4** Определите время $\Delta t_k$ прохождения $k$-того интервала от $\varphi_{k-1}$ до $\varphi_k$.

**2.5** Найдите выражение для времени $t_k$ прохождения шарика до угла $\varphi_k$. Для упрощения расчетов выразите его через время $t_{k-1}$ прохождения до предыдущего значения угла $\varphi_{k-1}$.

**2.6** Приведите формулу для периода колебаний $T_N$ при заданном разбиении на $N$ интервалов.

## 3. Пробный эксперимент, оценка погрешностей.

На этом этапе необходимо убедиться в работоспособности установки, что в данном случае означает возможность проведения расчетов по разработанному выше алгоритму, а также оценить, достигается ли необходимая точность результатов.

Как было отмечено ранее, погрешности расчетов зависят от числа интервалов разбиения $N$. В данном задании вам предстоит проводить расчеты не на компьютере, а «вручную», с помощью калькулятора. Увеличение $N$ уменьшает погрешность расчетов, но увеличивает время их проведения. Поэтому важно выбрать оптимальное значение этой величины – минимальное значение, при котором достигается требуемая точность. На данном этапе все расчеты проводите для $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

***ВНИМАНИЕ! Здесь и далее расчеты следует проводить с точностью до 4 десятичных знаков. Для экономии времени тщательно продумывайте всю последовательность расчетов: используйте ранее рассчитанные величины, вводите необходимые константы, присутствующие в формулах (чтобы не пересчитывать их несколько раз), записывайте результаты промежуточных расчетов в наиболее удобном виде.***

**3.1** Проведите расчеты времен $t_k$ прохождения точек с координатами $\varphi_k$ для $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Найдите приближенные значения периодов колебаний $T_N$, рассчитанные по $N$ точкам. Результаты представьте в Таблице 1.
**3.2** Постройте График 1 закона движения маятника $\varphi(t)$ за четверть периода по результатам расчетов при $N = 16$.
**3.3** На том же Графике 1 постройте закон движения $\varphi(t)$, считая, что колебания являются малыми. Результаты расчетов закона движения приведите в Таблице 2.

В качестве оценки относительной погрешности расчета периода колебаний при разбиении на $N$ интервалов используем величину

$$\varepsilon_N = \frac{T_N - T_{32}}{T_{32}},$$

где $T_{32}$ – значение периода, рассчитанное для $N = 32$, что наиболее близко к истинному значению.

Зависимость относительной погрешности расчета $\varepsilon_N$ от числа разбиений $N$ описывается приближенной формулой

$$\varepsilon_N = \frac{C}{N^\gamma},$$

где $C$ и $\gamma$ - некоторые постоянные величины.

**3.4** Рассчитайте относительные погрешности определения периодов $\varepsilon_N$. Результаты представьте в Таблице 3.
**3.5** Докажите на Графике 2 применимость приведенной выше формулы для относительной погрешности и найдите значения параметров $C$ и $\gamma$.
**3.6** Определите минимальное значение $N_{\min}$, при котором относительная погрешность расчета периода не превышает 0.2%.

В дальнейших расчетах используйте найденное значение числа интервалов разбиения $N_{\min}$.

**4. Эксперимент: зависимость периода от амплитуды.**

На этом этапе компьютерного эксперимента определим зависимость периода колебаний математического маятника от амплитуды $T(\varphi_0)$, которая описывается функцией

$$T(\varphi_0) = T_0\left(a + \frac{\varphi_0^2}{b}\right),$$

где $T_0$ – период малых колебаний маятника, $a, b$ – постоянные величины.

**4.1** Рассчитайте периоды колебаний математического маятника для следующего набора амплитуд $\varphi_0$: $15°, 30°, 45°, 60°, 75°$ и $90°$, который вы уже определили.
**4.2** Докажите на Графике 3 применимость приведенной выше формулы для зависимости периода колебаний маятника от его амплитуды.
**4.3** Определите значения параметров $a, b$.

Пусть погрешность измерения периода колебаний маятника в реальном эксперименте составляет примерно $5\%$.

**4.4** Обоснуйте, при каких углах $\varphi_0$, выраженных в градусах, колебания математического маятника можно считать малыми.