

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ:**Математический маятник или какой угол считать малым...****1. Построение теоретической модели.**

1.1 Формула для периода малых колебаний математического маятника имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

1.2 Из уравнения закона сохранения механической энергии для тела маятника (нулевой уровень потенциальной энергии принят на уровне точки подвеса)

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad (2)$$

следует формула для угловой скорости движения маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \quad (3)$$

1.3 Разобьем весь участок движения от φ_0 до нуля на бесконечно малые интервалы $d\varphi$. Время dt , за которое маятник пройдет этот интервал, равно

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \quad (4)$$

Тогда время движения t_1 определяется как сумма малых интервалов, что сводится к простому интегрированию

$$t_1 = \int_0^{\varphi_0} dt = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \quad (5)$$

1.4 Период колебаний в 4 раза больше найденного времени t_1 , то есть

$$T = 4t_1. \quad (6)$$

1.5 Угловая скорость в безразмерных единицах выражается следующим образом

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{g}{l}}dt} = \sqrt{\frac{l}{g}}\omega. \quad (7)$$

1.6 Период малых колебаний в безразмерных единицах равен

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi. \quad (8)$$

1.7 Зависимость угловой скорости $\tilde{\omega}$ от угла отклонения φ имеет вид

$$\tilde{\omega}(\varphi) = \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}. \quad (9)$$

2. Конструирование экспериментальной установки, планирование эксперимента.

2.1 Интервал разбиения равен

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_0}{N}. \quad (10)$$

2.2 Сначала следует задать «нулевой» угол отклонения φ_0 , а координаты остальных точек разбиения задаются формулой

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} - \Delta\varphi. \quad (11)$$

2.3 Угловая скорость ω_k в точке φ_k рассчитывается по формуле

$$\omega_k = \sqrt{2(\cos\varphi_k - \cos\varphi_0)}. \quad (12)$$

В данном случае (при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$) эта формула еще больше упрощается

$$\omega_k = \sqrt{2 \cos \varphi_k}. \quad (12a)$$

2.4 В рекомендуемом приближении равноускоренного движения средняя скорость на выбранном интервале равна среднему арифметическому скоростей на концах интервала

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k),$$

Поэтому время Δt_k прохождения k -го интервала от φ_{k-1} до φ_k рассчитывается по формуле

$$\Delta t_k = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_{k-1} + \omega_k}. \quad (13)$$

2.5 Время t_k прохождения точки φ_k находится по формуле

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t_k \quad (14)$$

при начальном условии $t_0 = 0$.

2.6 Период колебаний T_N при разбиении на N интервалов рассчитывается по формуле

$$T_N = 4t_N. \quad (15)$$

3. Пробный эксперимент, оценка погрешностей.

3.1 Результаты расчетов угловых скоростей, времен и периодов колебаний при указанных значениях числа интервалов разбиения приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Расчет периодов колебаний при различном числе интервалов разбиения.

$N=$	32				$N=$	16			
$\Delta\varphi$	0,0491				$\Delta\varphi$	0,0982			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,5217	0,3133	0,3134	0,3134	1	1,4726	0,4428	0,4435	0,4435
2	1,4726	0,4428	0,1299	0,4432	2	1,3744	0,6246	0,1840	0,6274
3	1,4235	0,5417	0,0997	0,5430	3	1,2763	0,7620	0,1416	0,7690
4	1,3744	0,6246	0,0842	0,6271	4	1,1781	0,8749	0,1200	0,8890
5	1,3254	0,6971	0,0743	0,7014	5	1,0799	0,9710	0,1064	0,9954
6	1,2763	0,7620	0,0673	0,7687	6	0,9817	1,0541	0,0970	1,0923
7	1,2272	0,8208	0,0620	0,8307	7	0,8836	1,1264	0,0900	1,1824
8	1,1781	0,8749	0,0579	0,8886	8	0,7854	1,1892	0,0848	1,2672
9	1,1290	0,9247	0,0546	0,9432	9	0,6872	1,2434	0,0807	1,3479
10	1,0799	0,9710	0,0518	0,9950	10	0,5890	1,2896	0,0775	1,4254
11	1,0308	1,0140	0,0495	1,0444	11	0,4909	1,3281	0,0750	1,5004
12	0,9817	1,0541	0,0475	1,0919	12	0,3927	1,3593	0,0731	1,5735
13	0,9327	1,0915	0,0458	1,1377	13	0,2945	1,3834	0,0716	1,6451
14	0,8836	1,1264	0,0443	1,1819	14	0,1963	1,4006	0,0705	1,7156
15	0,8345	1,1589	0,0430	1,2249	15	0,0982	1,4108	0,0698	1,7854
16	0,7854	1,1892	0,0418	1,2667	16	0,0000	1,4142	0,0695	1,8549
17	0,7363	1,2173	0,0408	1,3075					
18	0,6872	1,2434	0,0399	1,3474					
19	0,6381	1,2674	0,0391	1,3865					
20	0,5890	1,2896	0,0384	1,4249					
21	0,5400	1,3098	0,0378	1,4626					
22	0,4909	1,3281	0,0372	1,4999					
23	0,4418	1,3446	0,0367	1,5366					

24	0,3927	1,3593	0,0363	1,5729					
25	0,3436	1,3723	0,0359	1,6088					
26	0,2945	1,3834	0,0356	1,6445					
27	0,2454	1,3929	0,0354	1,6798					
28	0,1963	1,4006	0,0351	1,7150					
29	0,1473	1,4065	0,0350	1,7500					
30	0,0982	1,4108	0,0348	1,7848					
31	0,0491	1,4134	0,0348	1,8196					
32	0,0000	1,4142	0,0347	1,8543					
			$T_N=$	7,4171				$T_N=$	7,4197

$N=$	8				$N=$	4			
$\Delta\varphi$	0,1963				$\Delta\varphi$	0,3927			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,3744	0,6246	0,6287	0,6287	1	1,1781	0,8749	0,8977	0,8977
2	1,1781	0,8749	0,2619	0,8906	2	0,7854	1,1892	0,3805	1,2783
3	0,9817	1,0541	0,2036	1,0941	3	0,3927	1,3593	0,3082	1,5864
4	0,7854	1,1892	0,1751	1,2692	4	0,0000	1,4142	0,2832	1,8696
5	0,5890	1,2896	0,1584	1,4276					
6	0,3927	1,3593	0,1483	1,5759					
7	0,1963	1,4006	0,1423	1,7182					
8	0,0000	1,4142	0,1395	1,8577					
			$T_N=$	7,4307				$T_N=$	7,4785

$N=$	2				$N=$	1			
$\Delta\varphi$	0,7854				$\Delta\varphi$	1,5708			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,5708	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	0,7854	1,1892	1,3209	1,3209	1	0,0000	1,4142	2,2214	2,2214
2	0,0000	1,4142	0,6034	1,9242					
			$T_N=$	7,6969				$T_N=$	8,8858

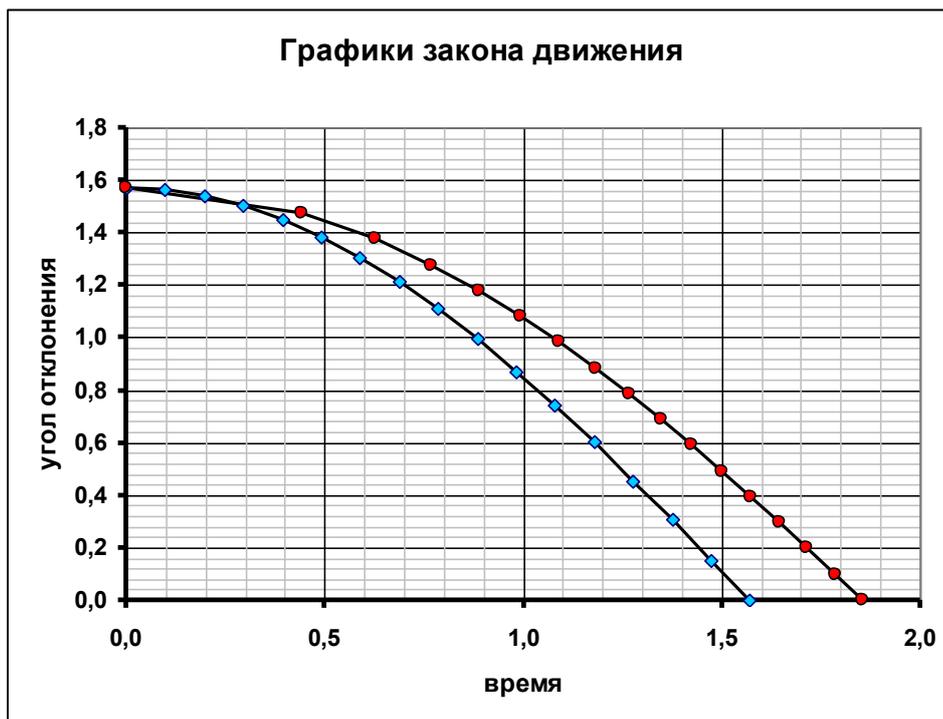
3.2 – 3.3 Для расчета графика закона движения в приближении малых колебаний необходимо воспользоваться формулой

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \cos t. \quad (16)$$

Результаты расчетов по этому закону представлены в таблице 2 и на графике. Там же приведен график рассчитанного закона движения. Интересно отметить, что в первом случае задаются значения времен, а рассчитываются соответствующие углы отклонения; а во втором, наоборот: задаются углы отклонения и проводится расчет времен.

Таблица 2.

k	t	φ
0	0,0000	1,5708
1	0,0982	1,5632
2	0,1963	1,5406
3	0,2945	1,5032
4	0,3927	1,4512
5	0,4909	1,3853
6	0,5890	1,3061
7	0,6872	1,2142
8	0,7854	1,1107
9	0,8836	0,9965
10	0,9817	0,8727
11	1,0799	0,7405
12	1,1781	0,6011
13	1,2763	0,4560
14	1,3744	0,3064
15	1,4726	0,1540
16	1,5708	0,0000



3.4 - 3.5 Результаты расчетов погрешностей ϵ_N периодов колебаний при различном числе интервалов разбиения N приведены в Таблице 3.

Таблица 3. Расчет погрешностей.

N	T	ϵ_N	$\ln N$	$\ln \epsilon_N$
1	8,8858	1,98E-01	0,0000	-1,6195
2	7,6969	3,77E-02	0,6931	-3,2774
4	7,4785	8,27E-03	1,3863	-4,7952
8	7,4307	1,83E-03	2,0794	-6,3026
16	7,4197	3,50E-04	2,7726	-7,9584
32	7,4171	0,00E+00		

Для определения параметров зависимости $\epsilon_N = \frac{C}{N^\gamma}$, ее необходимо представить в двойном логарифмическом масштабе

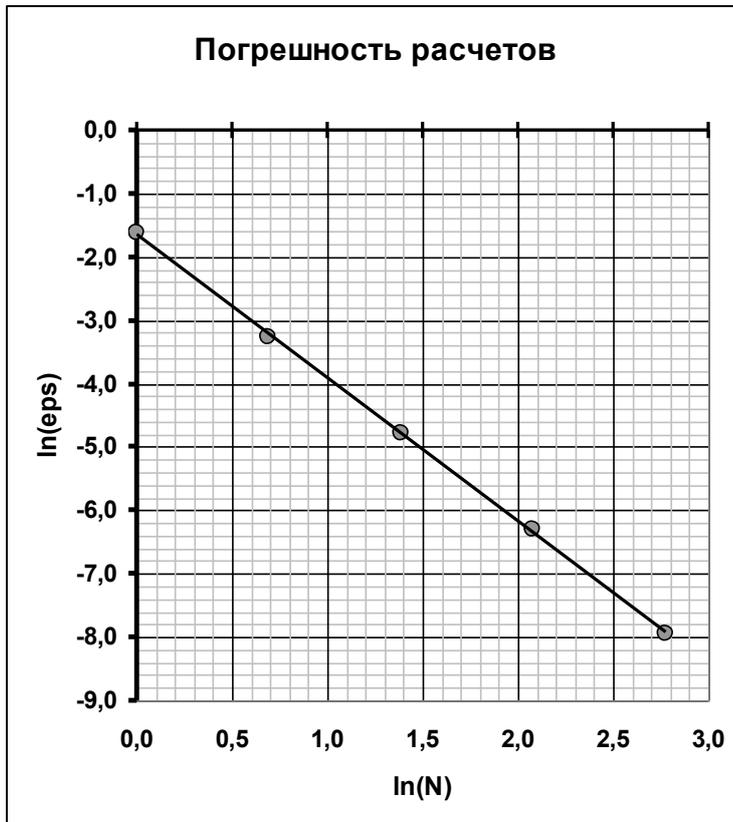
$$\ln \epsilon_N = \ln C - \gamma \ln N. \quad (17)$$

На рисунке справа показан график этой зависимости, построенный по данным Таблицы 3. Линейность полученной зависимости показывает применимость формулы для зависимости погрешности от числа N .

Параметры этой линейной зависимости, рассчитанные по методу наименьших квадратов равны: коэффициент наклона $a \approx -2,3$ и сдвиг $b \approx -1,65$. Следовательно, искомые параметры зависимости равны

$$\gamma \approx -a = 2,3$$

$$C = \exp(b) \approx 0,19$$



3.6 Из формулы (17) несложно найти число интервалов разбиений, необходимых для достижения погрешности $\varepsilon = 0,002$

$$N_{\min} = \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{1/\gamma} \approx 8. \tag{19}$$

Итак, все дальнейшие расчеты можно проводить при $N = N_{\min} = 8$.

4. Эксперимент: зависимость периода от амплитуды.

4.1 Результаты расчетов периодов колебаний для различных амплитуд колебаний показаны в Таблице 4.

Таблица 4. Расчет периодов колебаний.

φ_0	0,2618		15°		φ_0	0,5236		30°	
$N=$	8				$N=$	8			
$\Delta\varphi$	0,0327				$\Delta\varphi$	0,0654			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	0,2618	0,0000		0,0000	0	0,5236	0,0000		0,0000
1	0,2291	0,1261	0,5190	0,5190	1	0,4581	0,2484	0,5270	0,5270
2	0,1963	0,1724	0,2193	0,7383	2	0,3927	0,3402	0,2224	0,7494
3	0,1636	0,2036	0,1741	0,9124	3	0,3272	0,4023	0,1763	0,9257
4	0,1309	0,2259	0,1524	1,0648	4	0,2618	0,4470	0,1541	1,0799
5	0,0982	0,2419	0,1399	1,2047	5	0,1963	0,4791	0,1413	1,2212
6	0,0654	0,2527	0,1323	1,3370	6	0,1309	0,5008	0,1336	1,3548
7	0,0327	0,2590	0,1279	1,4649	7	0,0654	0,5135	0,1291	1,4839
8	0,0000	0,2611	0,1259	1,5908	8	0,0000	0,5176	0,1269	1,6108
			T=	6,3630				T=	6,4432
			T/To=	1,0127				T/To=	1,0255

φ_0	0,7854		45°		φ_0	1,0472		60°	
$N=$	8				$N=$	8			
$\Delta\varphi$	0,0982				$\Delta\varphi$	0,1309			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	0,7854	0,0000		0,0000	0	1,0472	0,0000		0,0000
1	0,6872	0,3631	0,5408	0,5408	1	0,9163	0,4664	0,5613	0,5613
2	0,5890	0,4987	0,2278	0,7687	2	0,7854	0,6436	0,2359	0,7972
3	0,4909	0,5913	0,1801	0,9488	3	0,6545	0,7660	0,1857	0,9829
4	0,3927	0,6584	0,1571	1,1059	4	0,5236	0,8556	0,1614	1,1444
5	0,2945	0,7069	0,1438	1,2497	5	0,3927	0,9207	0,1474	1,2917
6	0,1963	0,7398	0,1357	1,3855	6	0,2618	0,9653	0,1388	1,4306
7	0,0982	0,7590	0,1310	1,5165	7	0,1309	0,9914	0,1338	1,5643
8	0,0000	0,7654	0,1288	1,6453	8	0,0000	1,0000	0,1315	1,6958
			T=	6,5810				T=	6,7832
			T/To=	1,0474				T/To=	1,0796

φ_0	1,3090		75°		φ_0	1,5708		90°	
$N=$	8				$N=$	8			
$\Delta\varphi$	0,1636				$\Delta\varphi$	0,1963			
k	φ	ω	Δt_k	t_k	k	φ	ω	Δt_k	t_k
0	1,3090	0,0000		0,0000	0	1,5708	0,0000		0,0000
1	1,1454	0,5548	0,5899	0,5899	1	1,3744	0,6246	0,6287	0,6287
2	0,9817	0,7704	0,2469	0,8368	2	1,1781	0,8749	0,2619	0,8906

3	0,8181	0,9217	0,1934	1,0302	3	0,9817	1,0541	0,2036	1,0941
4	0,6545	1,0340	0,1673	1,1976	4	0,7854	1,1892	0,1751	1,2692
5	0,4909	1,1163	0,1522	1,3497	5	0,5890	1,2896	0,1584	1,4276
6	0,3272	1,1731	0,1429	1,4927	6	0,3927	1,3593	0,1483	1,5759
7	0,1636	1,2065	0,1375	1,6302	7	0,1963	1,4006	0,1423	1,7182
8	0,0000	1,2175	0,1350	1,7652	8	0,0000	1,4142	0,1395	1,8577
			T=	7,0608				T=	7,4307
			T/To=	1,1238				T/To=	1,1826

Ниже представлена итоговая таблица расчетов периода колебаний от амплитуды.

Таблица 5.

$\varphi_0, ^\circ$	φ_0	T	$\frac{T}{T_0}$	φ_0^2	$\frac{T}{T_0} - 1$
15	0,2618	6,3630	1,0127	0,0685	0,0127
30	0,5236	6,4432	1,0255	0,2742	0,0255
45	0,7854	6,5810	1,0474	0,6169	0,0474
60	1,0472	7,0608	1,0796	1,0966	0,0796
75	1,3090	7,0608	1,1238	1,7135	0,1238
90	1,5708	7,4307	1,1826	2,4674	0,1826

4.2 – 4.3 При малых колебаниях формула для периода колебаний

$$T(\varphi_0) = T_0 \left(a + \frac{\varphi_0^2}{b} \right) \quad (20)$$

должна совпадать с формулой (1), откуда следует, что параметр $a = 1$. Для проверки применимости формулы (20) к описанию результатов расчетов необходимо построить график зависимости величины $\left(\frac{T}{T_0} - 1 \right)$ от квадрата амплитуды φ_0^2 , который показан на рисунке.

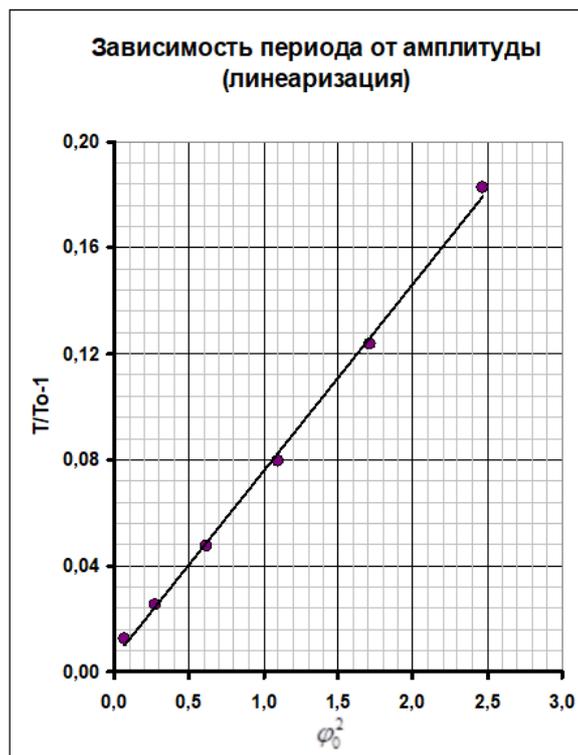
Коэффициент наклона полученной зависимости равен 0,0706, поэтому параметр b , входящий в формулу (20), примерно равен

$$b \approx 14. \quad (21)$$

4.4 При допустимой погрешности реального эксперимента в 5% отклонение величины периода от периода малых колебаний не будет заметно, если выполняется неравенство

$$\frac{\varphi_0^2}{b} < 0.05, \quad (22)$$

откуда следует, что «малыми» углами могут считаться углы, меньшие, чем $\varphi_0 < 45^\circ$.



Пункт	Содержание	Всего за пункт	Баллы
1. Построение теоретической модели.		1.5	
1.1	Формула (1): $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$	0.1	0.1
1.2	Закон движения	0.4	

	- закон сохранения энергии (2); - формула (3): $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$		0.1 0.3
1.3	Интегрирование закона движения - формула (4): $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$ - формула (5): $t_1 = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$	0.3	0.1 0.2
1.4	Период (6): $T = 4t_1$	0.1	0.1
1.5	Формула (7): $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{l}{g}}\omega$	0.2	0.2
1.6	Формула (8): $\tilde{T} = 2\pi$	0.2	0.2
1.7	Формула (9): $\tilde{\omega}(\varphi) = \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$	0.2	0.2
2. Конструирование экспериментальной установки, планирование эксперимента.		1.5	
2.1	Формула (10): $\Delta\varphi = \frac{\varphi_0}{N}$	0.1	0.1
2.2	Формула (11): $\varphi_k = \varphi_{k-1} - \Delta\varphi$	0.1	0.1
2.3	Формула (12): $\omega_k = \sqrt{2(\cos \varphi_k - \cos \varphi_0)}$	0.1	0.1
2.4	Равноускоренное движение Основная идея $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k)$ Формула (13): $\Delta t_k = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_{k-1} + \omega_k}$	1.0	0.5 0.5
2.5	Формула (14): $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$	0.1	0.1
2.6	Формула (15): $T_N = 4t_N$	0.1	0.1
3. Пробный эксперимент, оценка погрешностей.		9.0	
3.1	<i>Оценивается, если рассчитанные периоды отличаются от табличных не более, чем на 0,02. Рассчитаны периоды</i> N=32 N=16 N=8 N=4 N=2 N=1	4.2	1.2 1.0 0.8 0.6 0.4 0.2
3.2	Построение графика: Нанесены точки в соответствии с таблицей; Проведена сглаживающая кривая;	0.5	0.3 0.2
3.3	Построение графика Проведен расчет закона движения, таблица 2 Нанесены точки в соответствии с таблицей Проведена сглаживающая кривая	1.0	0.5 0.3 0.2
3.4	Проведены расчеты погрешностей (правильно), таблица 3	0.5	0.5
3.5	Построение графика Использован двойной логарифмический масштаб Построен линеаризованный график	2.3	0.5 0.5

	Получена линейная зависимость Найден показатель степени $\gamma \approx 2,3 \pm 0,1$ Найден коэффициент $C \approx 0,19 \pm 0,1$		0.3 0.5 0.5
3.6	Определено $N = 8 \pm 1$	0.5	0.5
4. Проведение измерений.		8.0	
4.1	<i>Оценивается, значения периодов отличаются от табличных не более, чем на 0,02</i> За каждый рассчитанный период Добавлен период из части 3	4.2	0.8 0.2
4.2	Построение графика линеаризованной зависимости Предложена линеаризация $T(\varphi_0^2)$ Построен график Получена линейная зависимость	1.5	0.5 0.5 0.5
4.3	Параметры линейной зависимости Параметр $a = 1$ (точно, и никакого иного) Параметр b в диапазоне 13-16	1.3	0.3 1.0
4.4	Определен «малый» угол $\varphi < 45^\circ$	1.0	1.0
	ВСЕГО	20.0	