

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10 января 2020 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
 - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*.
 - Черновые листы.
 - Неиспользованные листы.
 - Отпечатанные условия задачи.

Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1.1 (4,0 балла)

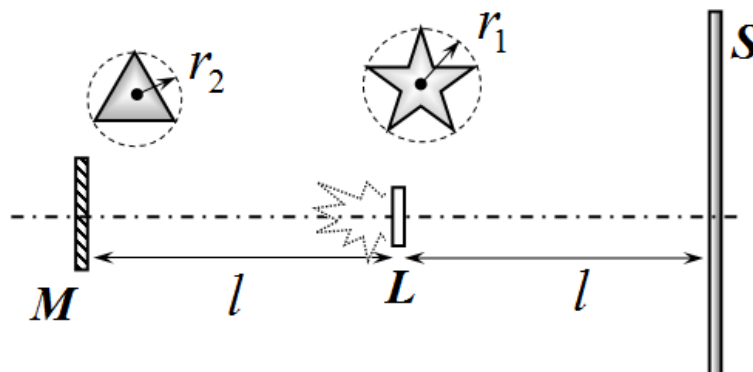
Математический маятник находится на экваторе Земли. Обозначим период его колебаний в полдень T_1 , а в полночь – T_2 . Найдите относительную разность этих периодов $\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$. Используйте следующие приближения и численные значения: Земля является идеальным шаром радиуса $r_1 = 6,4 \cdot 10^3$ км; орбита Земли является окружностью радиуса $r_2 = 1,5 \cdot 10^8$ км с центром, находящимся в центре Солнца; ось вращения Земли перпендикулярна плоскости земной орбиты; влиянием Луны и планет пренебречь; ускорение свободного падения на полюсе Земли $g_0 = 9,8$ м/с²; период обращения Земли вокруг своей оси составляет 1 сутки; период обращения Земли вокруг Солнца равен 1 году.

Задача 1.2 (3,0 балла)

Пространство между двумя концентрическими хорошо проводящими сферами радиусами a и $b > a$ заполнено веществом, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния до их общего центра. Между сферами протекает электрический ток силой I , так что объемная плотность джоулевых потерь в веществе одинакова во всех его точках и равна w . Определите среднюю плотность объемного заряда ρ_Q , накопившегося в объеме вещества за достаточно большое время протекания электрического тока.

Задача 1.3 (3,0 балла)

Между экраном S и плоским зеркалом M на равных расстояниях $l = 50$ см от них расположен плоский матовый источник L , испускающий белый свет только в сторону зеркала. Плоскости экрана, зеркала и источника параллельны друг другу. Источник имеет форму пятиконечной звезды, вписанной в окружность радиуса r_1 , а зеркало – правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса r_2 . Центры источника и зеркала находятся на оси, перпендикулярной плоскости экрана. Схематически нарисуйте изображение источника на экране, соблюдая его ориентацию в соответствии с рисунком ниже. Оцените размеры всех элементов изображения.



Задачу решите только для двух случаев:

1.3.1 $r_1 = 1,0$ мм и $r_2 = 10$ мм;

1.3.2 $r_1 = 10$ мм и $r_2 = 0,1$ мм.

Задача 2. Фазы и фазовые переходы (10,0 баллов)

При заданном давлении переход из одного агрегатного состояния вещества (фазы) в другое происходит всегда при строго определённой температуре, при этом сам переход называется фазовым. Например, лёд при атмосферном давлении плавиться при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, так что при подводе тепла температура смеси из льда и воды остается неизменной вплоть до того момента, пока весь лёд не превратится в воду.

Во всех предлагаемых ниже задачах считайте, что удельный объём жидкой фазы пренебрежимо мал по сравнению с удельным объёмом насыщенного пара, который можно считать идеальным газом. Теплоёмкость жидкой воды считайте независимой от температуры.

Справочные данные

Газовая постоянная $R = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$;

молярная масса воздуха $\mu_{air} = 29,0\text{ г}/\text{моль}$;

ускорение свободного падения $g = 9,81\text{ м}/\text{с}^2$.

Нормальные условия:

давление $P_0 = 1\text{ атм} = 760\text{ мм. рт. ст.} = 101325\text{ Па}$,

температура $T_0 = 273,15\text{ К} = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Свойства воды (H_2O)

Молярная масса $\mu_w = 18,0\text{ г}/\text{моль}$;

плотность воды $\rho_w = 1,00\text{ г}/\text{см}^3$;

плотность льда $\rho_i = 0,920\text{ г}/\text{см}^3$;

температура плавления льда при нормальном давлении $t_m = 0,00\text{ }^{\circ}\text{C}$;

температура кипения воды при нормальном давлении $t_b = 100,0\text{ }^{\circ}\text{C}$;

удельная теплоёмкость воды $c_w = 4,20\text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$;

удельная теплота плавления льда $q_i = 334\text{ Дж}/\text{г}$;

удельная теплота парообразования воды (при $100\text{ }^{\circ}\text{C}$) $r_w = 2259\text{ Дж}/\text{г}$;

показатель адиабаты Пуассона для водяных паров $\gamma = C_p/C_v = 4/3$.

Теплота фазового перехода

Если переход вещества из одной фазы в другую связан с выделением или поглощением некоторого количества теплоты, называемой теплотой перехода, то такой переход называется фазовым переходом первого рода. При этом теплота перехода q для единичной массы называется удельной теплотой фазового перехода (плавления, испарения, возгонки).

Поскольку фазовый переход происходит при постоянном давлении, то по первому началу термодинамики теплота q расходуется на изменение внутренней энергии u и на работу A против постоянного внешнего давления:

$$q = u_2 - u_1 + A,$$

где u_1, u_2 – удельные внутренние энергии соответственно первой и второй фаз соответственно.

При плавлении (кристаллизации) из-за малого различия плотностей жидкой и твёрдой фаз изменение объёма в результате фазового перехода невелико, поэтому работой A можно пренебречь по сравнению с изменением внутренней энергии.

2.1 Рассчитайте, какая часть теплоты испарения воды при $t_b = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ расходуется на изменение внутренней энергии. Ответ выразите в %.

2.2 Вычислите удельную теплоту парообразования воды при комнатной температуре $t = 20,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

В дальнейшем удельную теплоту испарения всех жидкостей считайте не зависящими от температуры.

Формула Клапейрона – Клаузиуса

При изменении давления температура фазового перехода первого рода меняется, то есть фазовый переход имеет место при строго определённой зависимости $P(T)$ между давлением P и температурой T вещества. Эта зависимость, изображённая на координатной (T, P) -плоскости, называется фазовой $T - P$ диаграммой, а сама линия $P(T)$ – линией фазового равновесия. Формула Клапейрона-Клаузиуса дает наклон линии фазового равновесия $P(T)$ в виде:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}$$

где q – удельная теплота перехода из фазы 1 с удельным объёмом v_1 в фазу 2 с удельным объёмом v_2 .

2.3 Считая известным давление насыщенного пара воды при температуре $t_b = 100$ °С, получите явную зависимость давления насыщенных паров воды от температуры $P(T)$.

2.4 Вычислите температуру кипения воды на самой высокой вершине Казахстана – пике Хан-Тенгри. Высота пика Хан-Тенгри над уровнем моря $h \approx 7000$ м. Температуру воздуха по высоте считать постоянной и равной $t_0 = 0$ °С.

2.5 При каком давлении (в атмосферах) лёд будет плавиться при температуре $t = -1,00$ °С?

2.6 Известно, что кристаллики льда начинают разрушаться, если вдоль какого-либо направления кристалла приложить силу, создающее давление $P > P_{cr} \sim 1000$ атм. Поэтому снег в морозную погоду «хрустит» при ходьбе. Оцените максимальную температуру воздуха t_{max} , при которой снег все еще «хрустит» при ходьбе.

2.7 В сосуде находится один моль насыщенного водяного пара при температуре $t_b = 100$ °С. Пар нагревается и одновременно меняется его объём так, что он все время остаётся насыщенным. Найдите молярную теплоёмкость пара в таком процессе.

Пограничное кипение

Пограничное кипение – это кипение на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей. Температура пограничного кипения может существенно отличаться от температур объёмного кипения каждой из жидкостей.

Тетрахлорметан или четырёххлористый водород представляет собой тяжёлую (плотность $\rho = 1,60$ г/см³) прозрачную жидкость с молярной массой $\mu = 153,8$ г/моль. При нормальном атмосферном давлении тетрахлорметан кипит при температуре $t = 76,65$ °С, при этом он практически не растворяется в воде. Сосуд объёмом $V = 100$ мл наполовину наполняют тетрахлорметаном, а поверх заливают такое же (по объёму) количество воды. При этом образуется четкая граница вода-тетрахлорметан. При равномерном нагревании сосуда на водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре $t^* = 66,0$ °С, что значительно ниже температуры объёмного кипения каждой из компонент в отдельности.

2.8 Рассчитайте по этим данным удельную теплоту r испарения тетрахлорметана, если известно, что давление насыщенных паров воды при температуре пограничного кипения $P_w(t^*) = 196$ мм. рт. ст.

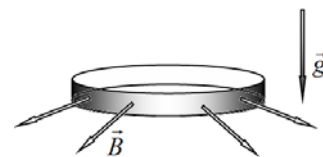
2.9 Найдите массу остающейся в сосуде жидкости к моменту полного выкипания другой жидкости при таком пограничном кипении.

Рассмотрим ещё одну пару несмешивающихся жидкостей, воду и фторкетон. Жидкость фторкетон, иногда называемая «сухой водой», используется при тушении пожаров в библиотеках, музеях, офисах, поскольку не смачивает бумагу. Это тяжелая (плотность $\rho = 1,72$ г/см³) прозрачная жидкость с молярной массой $\mu = 316$ г/моль, которая в воде практически не растворяется. Температура кипения фторкетона при атмосферном давлении $t_f = 49,2$ °С, удельная теплота парообразования $r = 95,0$ Дж/г. Если поверх фторкетона в сосуд налить воду, то также образуется четкая граница вода-фторкетон.

2.10 Оцените температуру t_x закипания жидкостей на границе вода-фторкетон, если известно давление насыщенных паров воды при температуре объёмного кипения фторкетона $P_w(t_f) = 89,0$ мм. рт. ст.

Задача 3. Кольцо в магнитном поле (10,0 балла)**Равномерно заряженное кольцо**

Очень тонкое кольцо массы m и радиуса r равномерно заряжено по своей длине зарядом q . В начальный момент времени кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения g , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией B . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.



3.1 Найдите максимальную скорость центра масс кольца v_{max} за все время движения.

3.2 Найдите интервал времени Δt , прошедший от начала движения до момента первого достижения максимальной скорости центром масс кольца.

3.3 Найдите максимальную высоту h_{max} , на которую опустится центр масс кольца за все время движения.

Проводящее кольцо

Очень тонкое кольцо массы m и радиуса r изготовлено из проводящего материала с удельным сопротивлением ρ и поперечным сечением $s \ll r^2$. В начальный момент времени $t = 0$ кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения g , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией B . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.

3.4 Найдите установившуюся скорость центра масс кольца v_0 через достаточно большой промежуток времени.

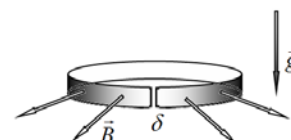
3.5 Зависимость силы тока в кольце $I(t)$ от времени t имеет вид

$$I(t) = A_1 + B_1 \exp(\gamma_1 t).$$

Определите постоянные A_1, B_1 и γ_1 .

Разрезанное проводящее кольцо

Очень тонкое кольцо массы m и радиуса r изготовлено из проводящего материала с удельным сопротивлением ρ и поперечным сечением s . Вдоль радиуса кольца сделан разрез шириной $\delta \ll \sqrt{s} \ll r$. В начальный момент времени $t = 0$ кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения g , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией B . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.



3.6 Найдите установившееся ускорение центра масс кольца a_0 через достаточно большой промежуток времени.

3.7 Зависимость силы тока в кольце $I(t)$ от времени t имеет вид

$$I(t) = A_2 + B_2 \exp(\gamma_2 t).$$

Определите постоянные A_2, B_2 и γ_2 .

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b|.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ где } n - \text{целое число}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ для } x \ll 1 \text{ и любых } \gamma$$