

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10.0 балла)

Задача 1А (4.0 балла)

Так как нить нерастяжима и натянута, то скорость шайбы всегда перпендикулярна нити. Поэтому сила натяжения нити работы не совершает и скорость шайбы остаётся постоянной по модулю

$$v = const. \tag{1}$$

Шайба движется по траектории с радиусом кривизны, равным длине не намотанной нити l , поэтому условие разрыва нити находится из второго закона Ньютона

$$T = m \frac{v^2}{l}. \tag{2}$$

Длина нити изменяется в результате наматывания на цилиндр на величину

$$dl = -Rd\alpha, \tag{3}$$

где

$$d\alpha = \omega dt, \tag{4}$$

а угловая скорость вращения нити равна

$$\omega = \frac{v}{l}. \tag{5}$$

Из уравнений (3)-(5) следует, что

$$l dl = -Rv dt, \tag{6}$$

а его интегрирование дает

$$l^2 - l_0^2 = -2Rvt. \tag{7}$$

Подставляя (1) в (7), получаем искомое время

$$t = \frac{l_0^2 - \left(\frac{mv^2}{T}\right)^2}{2Rv} = \frac{l_0^2 T^2 - m^2 v^4}{2RvT^2}. \tag{8}$$

Содержание	баллы
Скорость шайбы постоянна	1
$T = m \frac{v^2}{l}$	0.5
$l dl = -Rv dt$	1
$l^2 - l_0^2 = -2Rvt$	0.5
$t = \frac{l_0^2 T^2 - m^2 v^4}{2RvT^2}$	1
Итого	4.0

Задача 1В (3.0 балла)

Возможное решение. Мощность потока теплоты от тела в воздух пропорциональна разности температур тела T и воздуха T_x с коэффициентом α , то есть

$$P = \alpha(T - T_x), \tag{1}$$

в результате чего тело с теплоемкостью C за время dt остывает на dT , которое подчиняется уравнению баланса теплоты

$$CdT = -Pdt. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) при начальном условии $T = T_0$ имеют решение

$$T(t) = T_x + (T_0 - T_x)e^{-\beta t}, \tag{3}$$

где $\beta = \alpha / C$ – некоторая постоянная.

Пусть за некоторый интервал времени тело остыло от температуры T_0 до температуры T_1 , тогда из (3) следует

$$(T_1 - T_0) = \gamma(T_0 - T_x). \tag{4}$$

где γ – постоянная.

За следующий такой же промежуток времени эта разность также изменится в γ раз

$$(T_2 - T_1) = \gamma(T_1 - T_x). \tag{5}$$

Из этих уравнений следует уравнение

$$\frac{(T_0 - T_x)}{(T_1 - T_0)} = \frac{(T_1 - T_x)}{(T_2 - T_0)}, \tag{6}$$

которое имеет решение

$$T_x = \frac{T_0 T_2 - T_1^2}{(T_0 + T_2) - 2T_1}. \tag{7}$$

Из графика легко найти: начальная температура $T_0 = 373\text{K}$, через 10 минут $T_1 = 337\text{K}$, через 20 минут $T_2 = 319\text{K}$. Подставляя эти значения в формулу (7), находим, что комнатная температура равна

$$T_x = 301\text{K} = 28^\circ\text{C}. \tag{8}$$

Содержание	баллы
Корректный метод определения температуры воздуха	1.5
Температура воздуха в интервале $T_x = 27.5 - 28.5^\circ\text{C}$	1.5
Температура воздуха в интервале $T_x = 27.0 - 29.0^\circ\text{C}$	(1.0)
Температура воздуха в интервале $T_x = 26.5 - 29.5^\circ\text{C}$	(0.5)
Вне интервала	0
Итого	3.0

Задача 1С (3.0 балла)

Пусть R — активная составляющая нагрузки (действительная часть импеданса), а X — реактивная составляющая всей цепи (мнимая часть полного импеданса). Тогда амплитуда тока равна

$$I = \frac{U}{\sqrt{(r+R)^2 + X^2}}.$$

Средняя тепловая мощность в нагрузке

$$P = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{U^2 R}{2[(r+R)^2 + X^2]}.$$

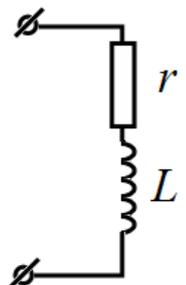
Видно, что максимальной мощности соответствует $X = 0$, т.е. в цепи не должно быть сдвига фаз. Оставшееся выражение имеет максимум при $R = r$.

Сдвиг фаз будет нулевым, если последовательно конденсатору подключить катушку, такую что $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ откуда $L = \frac{1}{\omega^2 C} = 1.00 \cdot 10^{-2}$ Гн.

Получается, что простейшая нагрузка должна состоять из последовательно соединённых резистора, сопротивлением 2019 Ом и катушки индуктивностью $1.00 \cdot 10^{-2}$ Гн.

Максимальная мощность равна

$$P_{max} = \frac{1}{2} \frac{U^2}{4r} = \frac{U^2}{8r} = 13.9 \text{ мВт}.$$



Содержание	баллы
Сдвиг фаз должен быть нулевой	1
<i>Если только результат без обоснования</i>	(0,5)
Найдена индуктивность (формула) $L = \frac{1}{\omega^2 C}$	0,7

Найдена индуктивность (число) $L = 10^{-2}$ Гн	0,3
Максимум при $R = r$	0,5
Максимальная мощность (формула) $P_{max} = \frac{U^2}{8r}$	0,3
Максимальная мощность (число) $P_{max} = 14$ мВт	0,2
Итого	3,0

Задача 2. Проводники в электрическом поле (10,0 балла)

Проводящий шар и точечный заряд

2.1 Потенциал электрического поля заряда q равен

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(l-x)^2+y^2}}, \tag{1}$$

а потенциал точечного заряда Q

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}}. \tag{2}$$

По принципу суперпозиции полный потенциал есть их сумма, то есть

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(l-x)^2+y^2}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}}. \tag{3}$$

2.2 Уравнение окружности, соответствующей поверхности шара, имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{4}$$

Исключая y с помощью (4) и подставляя в формулу (3), находим

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{l^2-2lx+R^2}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2-2ax+R^2}}. \tag{5}$$

2.3 Потенциал шара равен нулю, так как он заземлен, то есть

$$\varphi = 0. \tag{6}$$

Приравнявая выражение (5) к нулю, перепишем его в виде

$$\frac{Q}{q} = -\frac{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}{\sqrt{l^2-2lx+R^2}} = \beta = const < 0. \tag{7}$$

Возводя уравнение (7) в квадрат, получаем следующее уравнение

$$2x(l\beta^2 - a) + a^2 + R^2 - \beta^2(l^2 + R^2) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) должно быть справедливым для всех $x \in (-R, R)$, а это возможно, только если коэффициент при первой степени x и свободный член по отдельности равны нулю, то есть

$$l\beta^2 - a = 0, \tag{9}$$

$$a^2 + R^2 - \beta^2(l^2 + R^2) = 0. \tag{10}$$

Решая систему уравнений (9) и (10), получаем два решения

$$a = l, \quad \beta = -1, \tag{11}$$

$$a = \frac{R^2}{l}, \quad \beta = -\frac{R}{l}. \tag{12}$$

Только решение (12) является ненулевым, поэтому окончательно получаем

$$Q = -q\frac{R}{l}, \tag{13}$$

$$a = \frac{R^2}{l}. \tag{14}$$

2.4 Сила, действующая на точечный заряд равна

$$F = \frac{q^2 R l}{4\pi\epsilon_0(l^2 - R^2)^2}, \tag{15}$$

откуда искомая работа вычисляется по формуле

$$A = \int_l^\infty F dl = \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(l^2 - R^2)}. \tag{16}$$

2.5 Будем медленно перемещать заряд из начального положения на бесконечность так, чтобы возникающие силы тока были малы и выделением джоулева тепла можно было пренебречь. Пусть W_q – энергия точечного заряда q , W_Q – искомая энергия взаимодействия индуцированных зарядов, W_{Qq} – энергия взаимодействия точечного заряда q с индуцированными зарядами, равная

$$W_{Qq} = -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0(l^2 - R^2)}. \quad (17)$$

При удалении заряда на бесконечность должен выполняться закон сохранения энергии, который в данном случае имеет вид

$$W_q + W_Q + W_{Qq} + A = W_q. \quad (18)$$

Из системы уравнений (16)-(18), окончательно находим

$$W_Q = \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(l^2 - R^2)}. \quad (19)$$

Проводящий шар в однородном поле

2.6 Для нахождения электрического поля внутри однородно заряженного шара воспользуемся теоремой Гаусса, записанной для сферического объема радиуса $r < R$. Заряд, находящийся внутри этого объема равен

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (20)$$

а поток вектора напряженности через его поверхность составляет

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E. \quad (21)$$

По теореме Гаусса

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (22)$$

откуда находим

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}. \quad (23)$$

В последнем выражении учтено, что векторы напряженности коллинеарны вектору \vec{r} .

2.7 Теперь рассмотрим два шара, имеющих объемные плотности зарядов противоположных знаков и рассчитаем электрическое поле в области их пересечения. Возьмем произвольную точку внутри этой области и проведем в нее из центров шаров радиусы векторы, обозначив их \vec{r}_+ и \vec{r}_- соответственно. Тогда по формуле (23)

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+, \quad (24)$$

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_-. \quad (25)$$

Суммарное поле находится из принципа суперпозиции

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}, \quad (26)$$

где \vec{a} – вектор, построенный от центра отрицательного шара к центру положительного.

2.8 Напряженность поля внутри проводящего шара должна быть равна нулю. Индуцированные заряды создают, согласно формуле (26), однородное электрическое поле, которое должно полностью компенсировать внешнее электрическое поле, откуда получаем, что

$$\rho a = 3\epsilon_0 E_0. \quad (27)$$

Заряды фиктивных шаров полностью компенсируются за исключением тонкого слоя вблизи поверхности, который можно считать поверхностным зарядом. Толщина слоя δ зависит от угла θ и в силу малости a равна

$$\delta = a \cos \theta. \quad (28)$$

Отсюда величина поверхностного заряда вблизи угла θ равна

$$\sigma = \frac{\rho V}{S} = \frac{\rho S \delta}{S} = \rho \delta. \quad (29)$$

Из выражений (27)-(29) окончательно получаем

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (30)$$

2.9 Рассмотрим тонкий цилиндр вблизи поверхности проводника и применим к нему теорему Гаусса. Так как поле внутри проводника отсутствует, а снаружи оно направлено по нормали, то по теореме Гаусса

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \quad (31)$$

откуда следует, что

$$E = 3E_0 \cos \theta. \quad (32)$$

Проводящий шарик и кольцо

2.10 Воспользуемся тем, что проводящий шарик очень маленький, так что электрическое поле кольца E в его окрестности можно считать практически однородным. В предыдущей части этой задачи показано, что его поляризацию можно представить как два фиктивных шара противоположного заряда. Эти два шара ведут себя во внешнем поле как диполь с моментом

$$\vec{p} = q\vec{a}, \quad (33)$$

где

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (34)$$

Используя (27), из (33) и (34) получаем

$$\vec{p} = 4\pi r^3 \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (35)$$

Вычислим поле кольца E в окрестности шарика как функцию его расстояния z до центра. Очевидно, что поле кольца направлено вдоль спицы. Разобьем его на малые части, несущие заряд Δq_i . Тогда проекция их поля на направление спицы имеет вид

$$\Delta E_z = \frac{\Delta q_i \cos \alpha}{4\pi \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^2}. \quad (36)$$

Учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (37)$$

и суммируя по всем элементам кольца, получаем

$$E(z) = \frac{qz}{4\pi \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (38)$$

Сила, действующая на диполь равна

$$F = qE(z+a) - qE(z) = qa \frac{dE}{dz} = p \frac{dE}{dz}. \quad (39)$$

Подставляя (35) и (38) в (39), получаем

$$F = \frac{q^2 r^3 z (R^2 - 2z^2)}{4\pi \varepsilon_0 (z^2 + R^2)^4}. \quad (40)$$

Из выражения (40) следует, что существуют три положения равновесия, которые определяются точками

$$z_1 = 0, \quad (41)$$

$$z_{2,3} = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (42)$$

Простой анализ показывает, что положение равновесия (41) является неустойчивым, а симметричные положения (42) являются устойчивыми.

Вблизи положения устойчивого равновесия выражения для силы (40) принимает вид

$$F = -\frac{8q^2 r^3 x}{81\pi \varepsilon_0 R^6}, \quad (43)$$

где

$$x = z - \frac{R}{\sqrt{2}} \ll R. \quad (44)$$

Уравнение Ньютона для движения шарика вдоль спицы при малых отклонениях x имеет вид

$$m\ddot{x} + \frac{8q^2 r^3}{81\pi \varepsilon_0 R^6} x = 0 \quad (45)$$

и представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{8q^2 r^3}{81\pi \varepsilon_0 m R^6}}. \quad (46)$$

2.11 Для получения ответа нет необходимости интегрировать формулу (40). В начальном положении проводящий шарик не поляризован и в конечном состоянии он тоже не поляризован, так как в нуле и на бесконечности электрическое поле кольца обращается в ноль. Поэтому применение закона сохранения энергии сразу приводит к ответу

$$A = 0. \quad (47)$$

Естественно, что интегрирование выражения (40) в пределах от нуля до бесконечности дает тот же самый ответ.

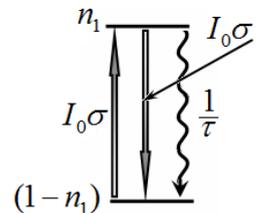
№	Содержание	баллы	
2.1	Формула (1) $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l-x)^2+y^2}}$	0,2	0,6
	Формула (2) $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$	0,2	
	Формула (3) $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l-x)^2+y^2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$	0,2	
2.2	Формула (4) $x^2 + y^2 = R^2$	0,2	0,4
	Формула (5) $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2-2lx+R^2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-2ax+R^2}}$	0,2	
2.3	Формула (6) $\varphi = 0$	0,2	1,8
	Формула (7) $\frac{Q}{q} = -\frac{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}{\sqrt{l^2-2lx+R^2}} = \beta = const < 0$	0,2	
	Формула (8) $2x(l\beta^2 - a) + a^2 + R^2 - \beta^2(l^2 + R^2) = 0$	0,2	
	Формула (9) $l\beta^2 - a = 0$	0,2	
	Формула (10) $a^2 + R^2 - \beta^2(l^2 + R^2) = 0$	0,2	
	Формула (11) $a = l, \beta = -1$	0,2	
	Формула (12) $a = \frac{R^2}{l}, \beta = -\frac{R}{l}$	0,2	
	Формула (13) $Q = -q\frac{R}{l}$	0,2	
	Формула (14) $a = \frac{R^2}{l}$	0,2	
2.4	Формула (15) $F = \frac{q^2 R l}{4\pi\varepsilon_0(l^2-R^2)^2}$	0,2	0,4
	Формула (16) $A = \int_l^\infty F dl = \frac{q^2 R}{8\pi\varepsilon_0(l^2-R^2)}$	0,2	
2.5	Формула (17) $W_{Qq} = -\frac{q^2 R}{4\pi\varepsilon_0(l^2-R^2)}$	0,2	0,6
	Формула (18) $W_q + W_Q + W_{Qq} + A = W_q$	0,1	
	Формула (19) $W_Q = \frac{q^2 R}{8\pi\varepsilon_0(l^2-R^2)}$	0,3	
2.6	Формула (20) $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$	0,1	0,4
	Формула (21) $\Phi_E = 4\pi r^2 E$	0,1	
	Формула (22) $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$	0,1	
	Формула (23) $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$	0,1	
2.7	Формула (24) $\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_+$	0,1	0,4
	Формула (25) $\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_-$	0,1	
	Формула (26) $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{a}$	0,2	
2.8	Формула (27) $\rho a = 3\varepsilon_0 E_0$	0,2	0,8
	Формула (28) $\delta = a \cos \theta$	0,2	
	Формула (29) $\sigma = \frac{\rho V}{S} = \frac{\rho S \delta}{S} = \rho \delta$	0,2	
	Формула (30) $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$	0,2	
2.9	Формула (31) $ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$	0,2	0,4
	Формула (32) $E = 3E_0 \cos \theta$	0,2	
2.10	Формула (33) $\vec{p} = q\vec{a}$	0,4	3,8
	Формула (34) $q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$	0,2	
	Формула (35) $\vec{p} = 4\pi r^3 \varepsilon_0 \vec{E}$	0,4	

	Формула (36) $\Delta E_z = \frac{\Delta q_i \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^2}$	0,2	
	Формула (37) $\cos \alpha = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$	0,2	
	Формула (38) $E(z) = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$	0,4	
	Формула (39) $F = qE(z+a) - qE(z) = qa \frac{dE}{dz} = p \frac{dE}{dz}$	0,4	
	Формула (40) $F = \frac{q^2 r^3 z (R^2 - 2z^2)}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^4}$	0,2	
	Формула (41) $z_1 = 0$	0,2	
	Формула (42) $z_{2,3} = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$	0,2	
	Формула (43) $F = -\frac{8q^2 r^3 x}{81\pi\epsilon_0 R^6}$	0,4	
	Формула (44) $x = z - \frac{R}{\sqrt{2}} \ll R$.	0,2	
	Формула (45) $\ddot{x} + \frac{8q^2 r^3}{81\pi\epsilon_0 R^6} x = 0$	0,2	
	Формула (46) $\omega = \sqrt{\frac{8q^2 r^3}{81\pi\epsilon_0 m R^6}}$	0,2	
	Формула (47) $A = 0$	0,4	
2.11	Формальная запись интеграла от формулы (40) без правильного ответа	0.1 из 0,4	0,4
Итого			10,0

Задача 3. Лазер (10,0 балла)

Инверсная населенность: двухуровневая схема

3.1 На рисунке показана схема возможных переходов и их вероятности. Если населенность возбужденного состояния равна n_1 , то населенность основного состояния равна $(1 - n_1)$, так как молекула может находиться только в одном из двух состояний.



Уравнение баланса, описывающее изменение населенности n , непосредственно следует из приведенной схемы

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} n_1 - I_0 \sigma n_1 + I_0 \sigma (1 - n_1). \tag{1}$$

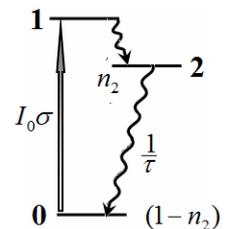
3.2 В стационарном режиме $dn_1 / dt = 0$, тогда из уравнения (1) следует, что населенность возбужденного состояния задается формулой

$$\bar{n}_1 = \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + 2I_0 \sigma \tau}. \tag{2}$$

Соответственно, разность населенностей возбужденного и основного состояний равна

$$\Delta \bar{n} = \bar{n}_1 - (1 - \bar{n}_1) = 2 \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + 2I_0 \sigma \tau} - 1 = -\frac{1}{1 + 2I_0 \sigma \tau}. \tag{3}$$

3.3 Даже при интенсивности светового потока накачки I_0 стремящейся к бесконечности инверсная населенность в двухуровневой схеме не достигается, поэтому усиление лазерного светового потока в этом случае невозможно.



Инверсная населенность: трехуровневая схема

3.4 В данной схеме отсутствуют вынужденные переходы «вниз», поэтому балансное уравнение для населенности состояния 2 будет иметь вид:

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{n_2}{\tau} + I_0 \sigma (1 - n_2). \tag{4}$$

При записи уравнения учтено, что молекула может находиться только в двух состояниях: возбужденном 2, или основном 0.

3.5 В стационарном режиме $dn_2/dt = 0$, поэтому, как следует из уравнения (4), населенность возбужденного состояния будет равна

$$\bar{n}_2 = \frac{I_0\sigma}{\frac{1}{\tau} + I_0\sigma} = \frac{I_0\sigma\tau}{1 + I_0\sigma\tau}. \quad (5)$$

Разность населенностей возбужденного и основного состояний рассчитывается по формуле

$$\Delta n = \bar{n}_2 - \bar{n}_0 = \bar{n}_2 - (1 - \bar{n}_2) = \frac{I_0\sigma\tau - 1}{1 + I_0\sigma\tau}. \quad (6)$$

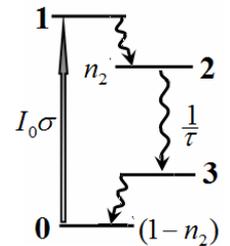
3.6 Усиление лазерного излучения возможно при достижении инверсной населенности, т.е. при $\Delta n > 0$. Из формулы (6) следует, что это возможно при

$$I_0\sigma\tau > 1. \quad (7)$$

Инверсная населенность: четырехуровневая схема

3.7 В четырехуровневой схеме уравнение баланса для населенности состояния 2 совпадает с уравнением (4), а стационарное значение населенности этого состояния также описывается формулой (5). Существенное отличие этой схемы заключается в том, что из состояния 2 переход происходит в промежуточное состояние 3, населенность которого практически равна 0, поэтому в данной схеме разность населенностей равна

$$\Delta n = \bar{n}_2 = \frac{I_0\sigma\tau}{1 + I_0\sigma\tau}, \quad (8)$$



поэтому инверсная населенность между состояниями 2 и 3 достигается практически при любом значении параметра

$$I_0\sigma\tau > 0. \quad (9)$$

Резонатор

3.8 Изменение числа фотонов в резонаторе dN обусловлено только их выходом через частично прозрачное зеркало. За малый промежуток времени dt через это зеркало вылетит число фотонов, равное

$$dN_{out} = (1 - \rho) I_G S dt = -dN. \quad (10)$$

где S – площадь поперечного сечения резонатора.

Интенсивность лазерного светового потока I_G можно выразить через среднюю плотность фотонов в резонаторе $\frac{N}{Sl}$ и скорость их распространения $\frac{c}{r}$ в виде

$$I_G = \frac{1}{2} \frac{N}{Sl} \frac{c}{r}. \quad (11)$$

Множитель $1/2$ учитывает, что в резонаторе распространяется два лазерных потока в противоположных направлениях. Выразив число фотонов в резонаторе через интенсивность генерации

$$N = \frac{2rSl}{c} I_G \quad (12)$$

и подставив его уравнение (10), получим

$$dI_G = -\frac{c}{2rSl} (1 - \rho) I_G S dt = -(1 - \rho) \frac{c}{2rl} I_G dt. \quad (13)$$

Это уравнение имеет требуемый вид

$$\frac{dI_G}{dt} = -\frac{c(1 - \rho)}{2rl} I_G = -\frac{1}{T} I_G, \quad (14)$$

где время жизни фотона в резонаторе определяется формулой

$$T = \frac{2rl}{c(1-\rho)} = 3,00 \cdot 10^{-9} \text{ с}. \quad (15)$$

3.9 Рассмотрим изменение числа фотонов при наличии вынужденного излучения и отсутствии их потерь. В соответствии с определением сечения вынужденного излучения, число появившихся фотонов может быть описано уравнением

$$dN = 2I_G \sigma_E n \gamma V dt = 2I_G \sigma_E n \gamma S l dt. \quad (16)$$

Здесь $n\gamma V$ – число молекул красителя в резонаторе, находящихся в возбужденном состоянии, $V = Sl$ – объем резонатора.

Подставив в это уравнение выражение для числа фотонов в резонаторе (12), в результате получим

$$\frac{dI_G}{dt} = \frac{\gamma c \sigma_E}{r} n I_G = K n I_G, \quad (17)$$

откуда коэффициент усиления определяется формулой

$$K = \frac{\gamma c \sigma_E}{r} = 5,72 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}. \quad (18)$$

Стационарный режим генерации

3.10 Для описания динамики интенсивности генерации необходимо объединить уравнения (14) и (17):

$$\frac{dI_G}{dt} = K n I_G - \frac{1}{T} I_G. \quad (19)$$

Населенность возбужденного состояния описывается уравнением баланса

$$\frac{dn}{dt} = I_0 \sigma_A (1-n) - \frac{1}{\tau} n - 2I_G \sigma_E n, \quad (20)$$

в котором учтены поглощение светового потока накачки, спонтанные и вынужденные переходы из возбужденного состояния.

3.11 Для начала генерации лазерного излучения необходимо, чтобы производная в уравнении (19) стала больше нуля, поэтому пороговое значение населенности возбужденного состояния равно

$$n_{th} = \frac{1}{KT} = 5,83 \cdot 10^{-3} \approx 1. \quad (21)$$

3.12 Для расчета порогового значения интенсивности накачки следует воспользоваться уравнением (20) при отсутствии генерации $I_G = 0$, откуда получаем

$$I_{0,th} = \frac{n_{th}}{\tau \sigma_A (1-n_{th})} \approx \frac{n_{th}}{\tau \sigma_A} = 3,58 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (22)$$

Для расчета энергетического потока надо рассчитанный поток (22) умножить на энергию одного кванта

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 3,83 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \quad (23)$$

поэтому энергетическая интенсивность накачки равна

$$I_E = \varepsilon I_{0,th} = 1,37 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}. \quad (24)$$

3.13 В стационарном режиме производные по времени в уравнениях (19)-(20) обращаются в нуль. Из уравнения (19) получаем

$$\bar{n} = \frac{1}{KT}, \quad (25)$$

а из уравнения (20) находим

$$I_G = \frac{I_0 \sigma_A - \frac{1}{\tau} \bar{n}}{2\sigma_E \bar{n}}. \tag{26}$$

Выразив интенсивность накачки через пороговое значение интенсивности накачки

$$I_0 = \eta I_{0,th} = \eta \frac{\bar{n}}{\tau \sigma_A} \tag{27}$$

и подставим в формулу (23), находим

$$I_G = \frac{\eta \frac{\bar{n}}{\tau \sigma_A} \sigma_A - \frac{1}{\tau} \bar{n}}{2\sigma_E \bar{n}} = \frac{\eta - 1}{2\tau \sigma_E}. \tag{28}$$

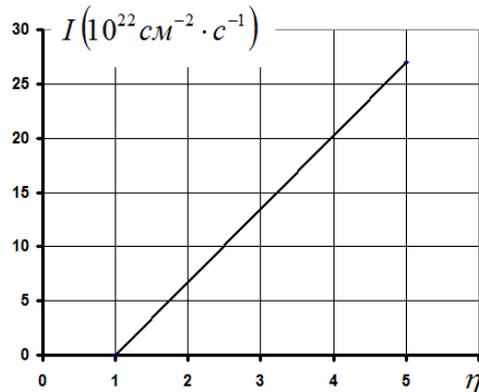
На выходе из резонатора интенсивность будет равна

$$I = (1 - \rho) I_G = \frac{(1 - \rho)}{2\tau \sigma_E} (\eta - 1) = E (\eta - 1), \tag{29}$$

в которой постоянный множитель равен

$$E = \frac{1 - \rho}{2\tau \sigma_E} = 5,41 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \tag{30}$$

График данной зависимости является прямой линией, показанной на рисунке ниже.



3.14 С одной стороны, число квантов света, поглощенных в резонаторе в единицу времени, рассчитывается по формуле

$$N_A = \eta I_{0,th} \sigma_A \gamma S l. \tag{31}$$

С другой стороны, число квантов, покидающих резонатор в единицу времени, равно

$$N_E = E (\eta - 1) S. \tag{32}$$

Их отношение и есть квантовый выход генерации, который оказывается равным

$$f = \frac{N_E}{N_A} = \frac{E (\eta - 1)}{(I_0)_{tr} \sigma_A (\gamma l)}. \tag{33}$$

Подстановка всех параметров, входящих в эту формулу, приводит к результату

$$f = \frac{\eta - 1}{\eta}. \tag{34}$$

№	Содержание	баллы	
3.1	Уравнение (1): $\frac{dn_1}{dt} = -\frac{1}{\tau} n_1 - I_0 \sigma n_1 + I_0 \sigma (1 - n_1)$	0,3	0,3
3.2	Формула (2): $\bar{n}_1 = \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + 2I_0 \sigma \tau}$	0,2	0,3

	Формула (3): $\Delta \bar{n} = \bar{n}_1 - (1 - \bar{n}_1) = 2 \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + 2I_0 \sigma \tau} - 1 = -\frac{1}{1 + 2I_0 \sigma \tau}$	0,1	
3.3	Ответ: «нет»	0,2	0,2
3.4	Уравнение (4): $\frac{dn_2}{dt} = -\frac{n_2}{\tau} + I_0 \sigma (1 - n_2)$	0,2	0,2
3.5	Формула (5): $\bar{n}_2 = \frac{I_0 \sigma}{\frac{1}{\tau} + I_0 \sigma} = \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + I_0 \sigma \tau}$	0,1	0,2
	Формула (6): $\Delta n = \bar{n}_2 - \bar{n}_0 = \bar{n}_2 - (1 - \bar{n}_2) = \frac{I_0 \sigma \tau - 1}{1 + I_0 \sigma \tau}$	0,1	
3.6	Условие (7): $I_0 \sigma \tau > 1$	0,3	0,3
3.7	Справедлива формула (5)	0,1	0,5
	Формула (8): $\Delta n = \bar{n}_2 = \frac{I_0 \sigma \tau}{1 + I_0 \sigma \tau}$	0,1	
	Условие (9): $I_0 \sigma \tau > 0$	0,3	
3.8	Формула (10): $dN_{out} = (1 - \rho) I_G S dt = -dN$	0,3	1,5
	Формула (11): $I_G = \frac{1}{2} \frac{N c}{S l r}$	0,5	
	Формула (15): $T = \frac{2rl}{c(1 - \rho)}$	0,4	
	Численное значение: $T = 3,00 \cdot 10^{-9} c$	0,3	
3.9	Формула (16): $dN = 2I_G \sigma_E n \gamma V dt = 2I_G \sigma_E n \gamma S l dt$	0,6	1,5
	Формула (18): $K = \frac{\gamma c \sigma_E}{r}$	0,5	
	Численное значение: $K = 5,72 \cdot 10^{10} c^{-1}$	0,4	
3.10	Уравнение (19): $\frac{dI_G}{dt} = KnI_G - \frac{1}{T} I_G$	0,2	0,5
	Уравнение (20): $\frac{dn}{dt} = I_0 \sigma_A (1 - n) - \frac{1}{\tau} n - 2I_G \sigma_E n$	0,3	
3.11	Производная больше нуля;	0,1	0,5
	Формула (21): $n_{th} = \frac{1}{KT}$	0,2	
	Численное значение: $n_{th} = 5,83 \cdot 10^{-3}$	0,2	
3.12	Интенсивность генерации равна нулю: $I_G = 0$	0,1	1,0
	Формула (22): $I_{0,th} = \frac{n_{th}}{\tau \sigma_A (1 - n_{th})} \approx \frac{n_{th}}{\tau \sigma_A}$	0,3	
	Численное значение интенсивности: $I_{0,th} = 3,58 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	0,3	
	Формула (23): $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$	0,1	
	Формула (24): $I_E = \varepsilon I_{0,th}$	0,1	
	Численное значение: $I_E = 1,37 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$	0,1	

3.13	Производные обнуляются	0,1	2,0
	Формула (25): $\bar{n} = \frac{1}{KT}$	0,2	
	Формула (26): $I_G = \frac{I_0 \sigma_A - \frac{1}{\tau} \bar{n}}{2\sigma_E \bar{n}}$	0,2	
	Формула (27): $I_0 = \eta I_{0,th} = \eta \frac{\bar{n}}{\tau \sigma_A}$	0,2	
	Формула (28): $I_G = \frac{\eta \frac{\bar{n}}{\tau \sigma_A} \sigma_A - \frac{1}{\tau} \bar{n}}{2\sigma_E \bar{n}} = \frac{\eta - 1}{2\tau \sigma_E}$	0,3	
	Формула (30): $E = \frac{1 - \rho}{2\tau \sigma_E}$	0,2	
	Численное значение: $E = 5,41 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	0,3	
	Построение графика: оси подписаны и оцифрованы	0,1	
	Построение графика: прямая линия	0,2	
	Построение графика: прямая линия проходит через 1	0,2	
3.14	Формула (31): $N_A = \eta I_{0,th} \sigma_A \gamma S l$	0,4	1,0
	Формула (32): $N_E = E(\eta - 1)S$	0,3	
	Формула (34): $f = \frac{\eta - 1}{\eta}$	0,3	
Итого			10,0