*VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике*
*Алматы, 2011*

**16 января 2011 года, 9.00–13.30**
**Первый день**
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

**1.** В трапеции $ABCD$ точки $M$ и $N$ – середины оснований $AD$ и $BC$ соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке $MN$.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой $MN$ ?

**2.** Найдите все функции $f$: $R \to R$ такие, что для любых $x, y \in R$ выполнено равенство

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y).$$

(Здесь $R$ обозначает множество действительных чисел.)

**3.** Обозначим через $N$ множество всех целых положительных чисел. Упорядоченную пару $(a;b)$ чисел $a,b \in N$ назовем *интересной*, если для любого $n \in N$ существует $k \in N$, такое, что число $a^k+b$ делится на $2^n$. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

*VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics*
*Almaty, 2011*

**16 January, 2011, 9.00–13.30**
**First day**
(Each problem is worth 7 points)

**1.** Given is trapezoid $ABCD$, $M$ and $N$ being the midpoints of the bases $AD$ and $BC$, respectively.

a) Prove that the trapezoid is isosceles if it is known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the segment $MN$.

b) Does the statement of the point a) remain true if it is only known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the line $MN$ ?

**2.** Find all functions $f$: $R \to R$ which satisfy the equality

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$$

for any $x, y \in R$. (Here $R$ denotes the set of real numbers.)

**3.** Let $N$ denote the set of all positive integers. An ordered pair $(a;b)$ of numbers $a,b \in N$ is called *interesting*, if for any $n \in N$ there exists $k \in N$ such that the number $a^k+b$ is divisible by $2^n$. Find all interesting ordered pairs of numbers.