

Объемные токи.

Часть 1

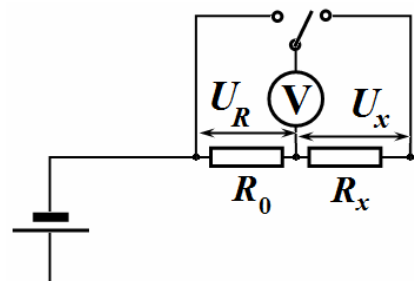
1.1 Сопротивление резистора равно $R_0 = 2,0 \pm 0,1$ кОм.

1.2 Так как при последовательном соединении проводников сила тока одинакова через каждый из них, то справедливо соотношение

$$\frac{U_R}{R_0} = \frac{U_x}{R_x},$$

из которой следует расчетная формула для измеряемого сопротивления

$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_R} \quad (1)$$



Таким образом, для измерения неизвестного сопротивления необходимо измерить напряжения на измеряемом и известном резисторах.

Если бы напряжение источника было стабилизировано, то достаточно было измерить напряжение на одном из них.

Часть 2.

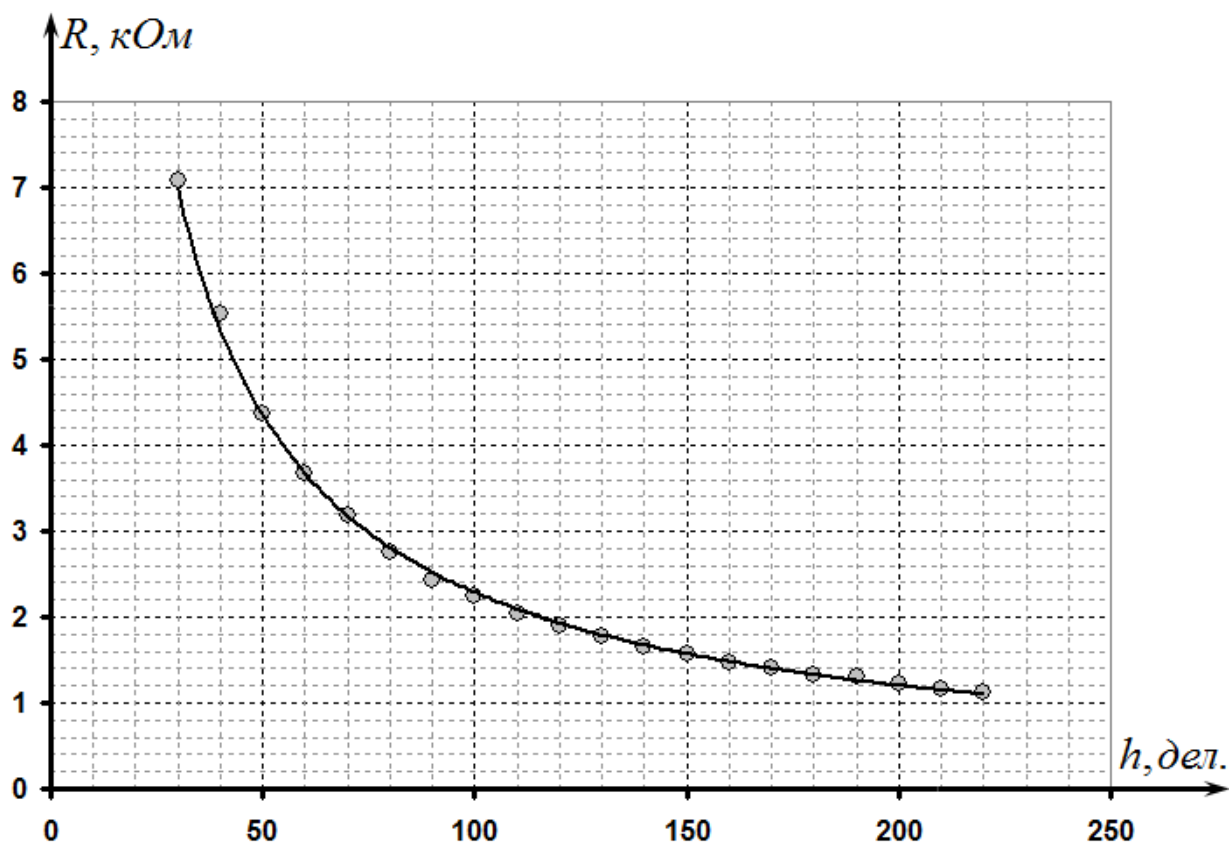
2.1 Результаты измерений напряжений в зависимости от высоты уровня налитой воды представлены в Таблице 1. В ней же приведены результаты расчета сопротивления воды между электродами.

Высота измерена в делениях шкалы мензурки.

Таблица 1. Зависимость сопротивления от высоты уровня воды.

h , дел	$100/h$, дел ⁻¹	U_x , В	U_R , В	R , кОм	$1/R$, кОм ⁻¹
30	3,33	3,82	1,08	7,07	0,14
40	2,50	3,60	1,30	5,54	0,18
50	2,00	3,36	1,54	4,36	0,23
60	1,67	3,17	1,73	3,66	0,27
70	1,43	3,01	1,89	3,19	0,31
80	1,25	2,84	2,06	2,76	0,36
90	1,11	2,69	2,21	2,43	0,41
100	1,00	2,59	2,31	2,24	0,45
110	0,91	2,48	2,42	2,05	0,49
120	0,83	2,38	2,52	1,89	0,53
130	0,77	2,30	2,60	1,77	0,57
140	0,71	2,22	2,68	1,66	0,60
150	0,67	2,16	2,74	1,58	0,63
160	0,63	2,08	2,82	1,48	0,68
170	0,59	2,03	2,87	1,41	0,71
180	0,56	1,96	2,94	1,33	0,75
190	0,53	1,93	2,97	1,30	0,77
200	0,50	1,86	3,04	1,22	0,82
210	0,48	1,80	3,10	1,16	0,86
220	0,45	1,76	3,14	1,12	0,89

График полученной зависимости показан на рисунке ниже.



Простым измерением легко установить, что объему $V_0 = 200 \text{ мл}$ соответствует высота $h_0 = 170 \text{ мм}$. Поэтому высота уровня налитой жидкости рассчитывается по формуле $h = V \frac{h_0}{V_0}$, то есть цена деления $\delta = 0,85 \frac{\text{мм}}{\text{мл}}$.

2.2 Схематическое распределение токов в этом случае показано на следующем рисунке.

Ток протекает между боковыми поверхностями спиц, поэтому высота уровня жидкости определяет площадь некоторого эффективного поперечного сечения.

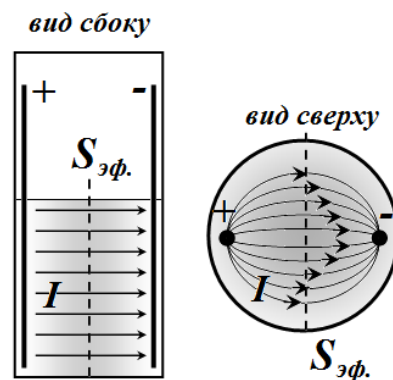
2.3 Поэтому разумно предположить, что сопротивление воды между спицами обратно пропорционально высоте уровня жидкости

$$R_{x0} = \frac{A}{h}. \quad (2)$$

где A - постоянная величина, имеющая смысл сопротивление слоя воды единичной толщины. Тогда измеренной сопротивление должно описываться формулой

$$R_x = \frac{A}{h} + B, \quad (3)$$

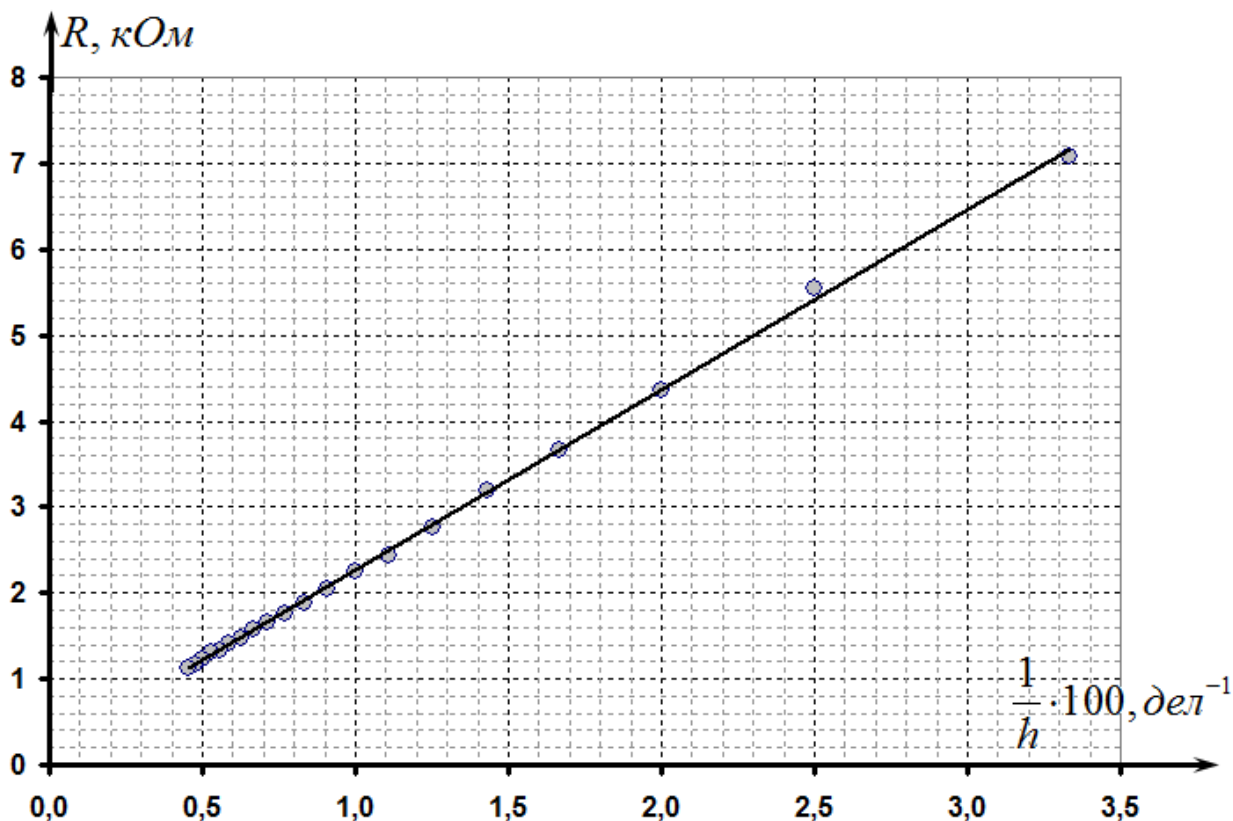
где B - постоянная величина, имеющая смысл дополнительного сопротивления (контактов, оксидного слоя на поверхности спиц и т.д.).



2.4 Для проверки выполнимости формулы (3) достаточно построить график зависимости сопротивления от величины обратной высоте столба воды $1/h$. Т.е. линейная зависимость должна наблюдаться для следующих величин:

$$\begin{aligned} y &= R \\ x &= \frac{1}{h} \end{aligned} \quad (4)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



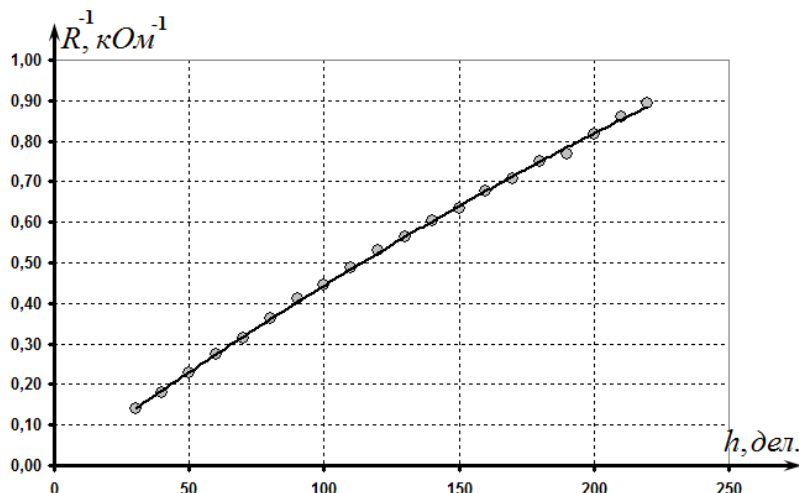
Параметры этой линейной зависимости, рассчитанные по методу наименьших квадратов равны

$$\begin{aligned} a &= (210 \pm 3) \text{кОм} \cdot \text{дел} \\ b &= (0,17 \pm 0,03) \text{кОм} \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения параметров зависимости (3) необходимо в значениях высоты столба перейти от делений шкалы к миллиметрам. Этот переход осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \delta = (178 \pm 2) \text{кОм} \cdot \text{мм} \\ B &= b = (0,17 \pm 0,03) \text{кОм} \end{aligned} \quad (6)$$

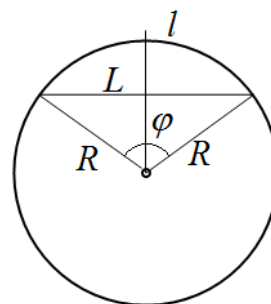
Дополнение. Линеаризация вида $\frac{1}{R} = \frac{h}{A}$, хотя и допустима, но приводит к худшим результатам, так как не учитывает дополнительного сопротивления цепи.



Часть 3.

3.1 Для измерения расстояния между спицами проще измерять длину дуги l между спицами по шкале, нанесенной на полоску скотча. Тогда расстояние между спицами можно рассчитать по геометрической формуле

$$L = D \sin \frac{l}{D}, \quad (7)$$



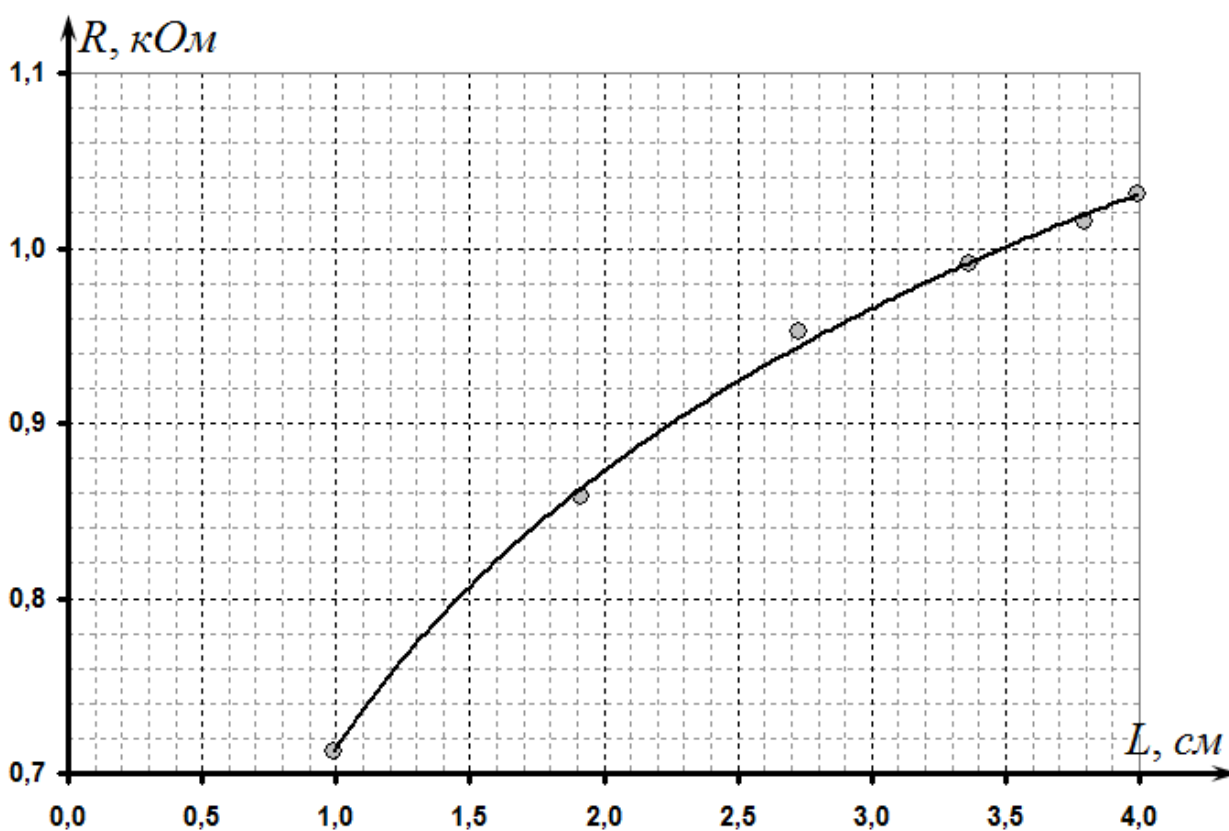
где $D = 40\text{мм}$ - диаметр мензурки.

Результаты измерений зависимости сопротивления воды от расстояния между спицами приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

l , см	L , см	U_x , В	U_R , В	R , кОм	$\ln L$
1	0,990	1,29	3,62	0,713	-0,010
2	1,918	1,45	3,38	0,858	0,651
3	2,727	1,59	3,34	0,952	1,003
4	3,366	1,62	3,27	0,991	1,214
5	3,796	1,64	3,23	1,015	1,334
6	3,990	1,65	3,2	1,031	1,384

График полученной зависимости показан на рисунке.



3.2 Теоретически можно показать, что сопротивление среды между двумя длинными параллельными электродами в бесконечной среде определяется по формуле

$$R = \frac{\rho}{\pi h} \ln \frac{L}{r_0}, \quad (8)$$

где h - длина электродов, r_0 - их радиус.

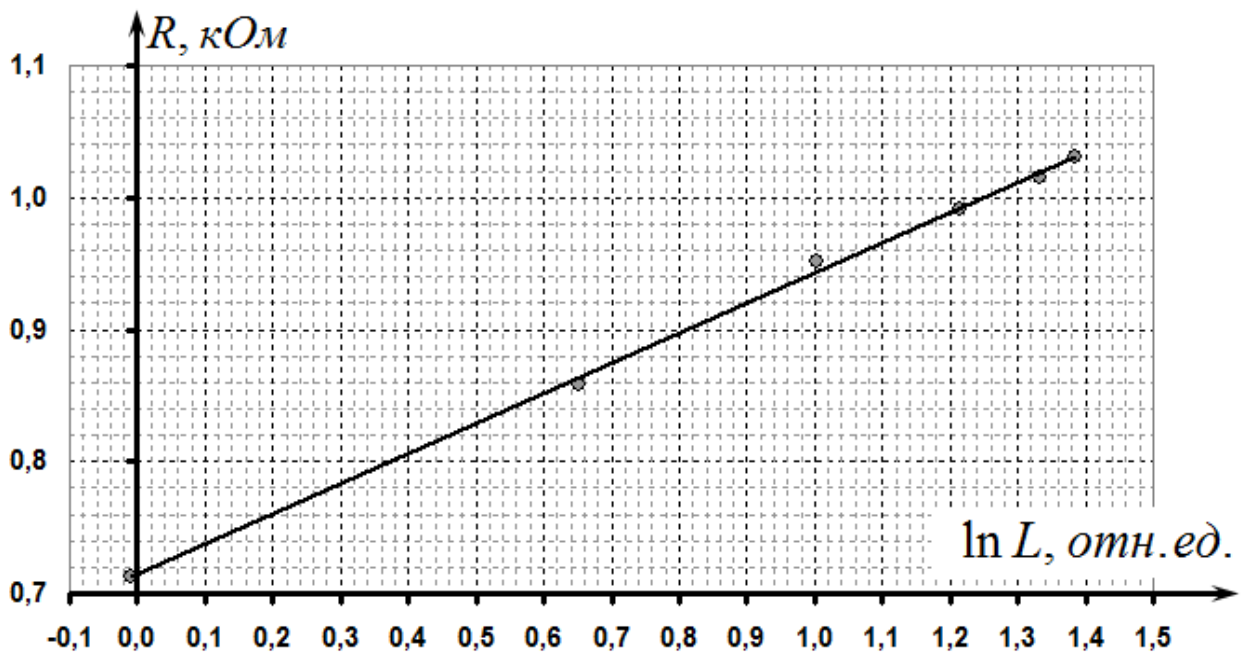
Можно предположить, что и в данном случае сопротивление воды между электродами линейно зависит от логарифма расстояния между ними, то есть

$$R(L) = A \ln L + B. \quad (9)$$

3.3 Для проверки выполнимости формулы (9) необходимо построить график зависимости сопротивления от логарифма расстояния $\ln L$. Т.е. линейная зависимость должна наблюдаться для следующих величин:

$$\begin{aligned} y &= R \\ x &= \ln L \end{aligned} \quad (10)$$

График этой зависимости показан на рисунке. Рисунок подтверждает сделанное предположение.



Параметры этой линейной зависимости, рассчитанные по методу наименьших квадратов равны

$$\begin{aligned} a &= (0,23 \pm 0,01) \text{ кОм} \\ b &= (0,71 \pm 0,01) \text{ кОм} \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, что значения параметра b зависят от единиц измерения расстояния L . В данном случае такие же значения имеют и параметры зависимости (9).

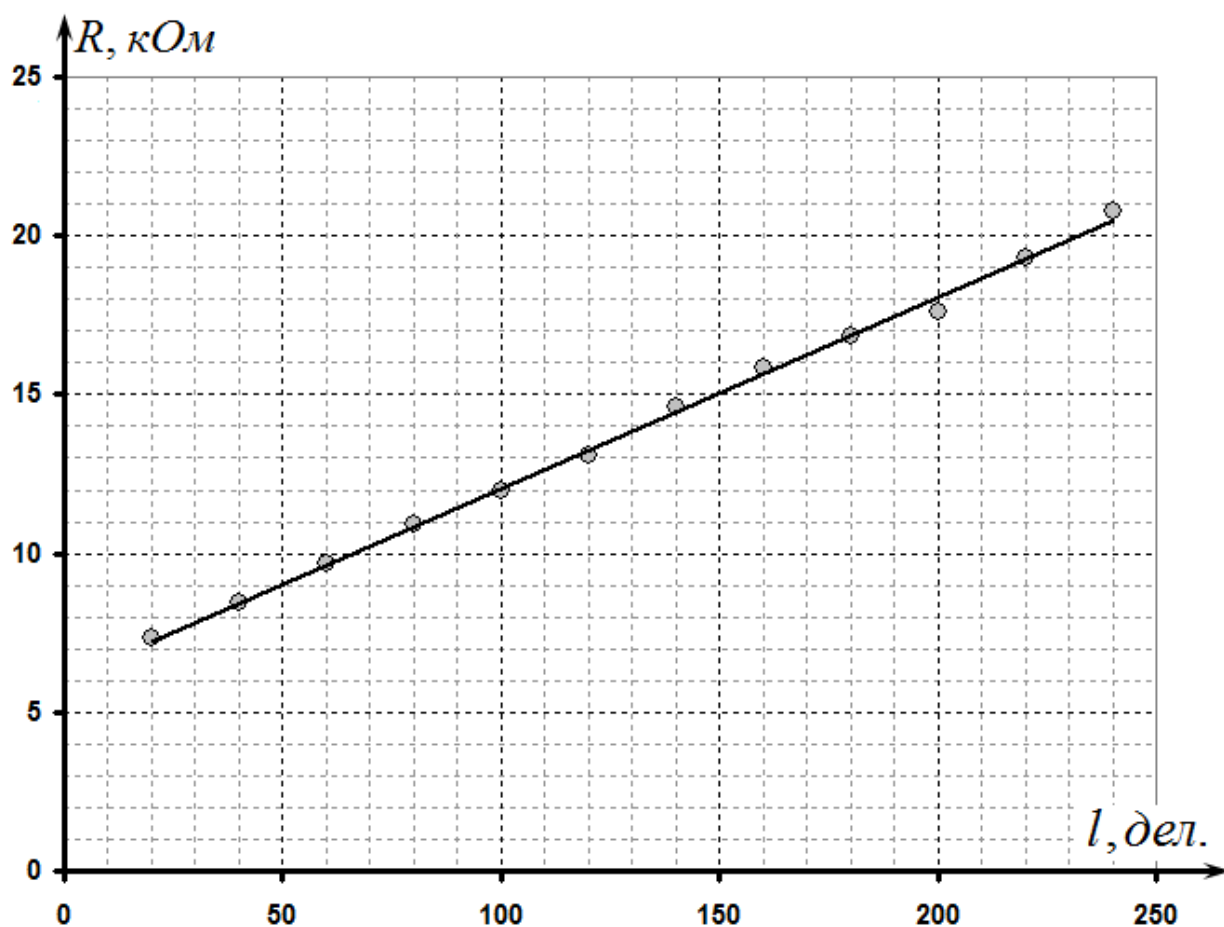
Часть 4.

4.1 Результаты измерений зависимости сопротивления воды от высоты поднятия второй спицы приведены в таблице 3. В данном случае для измерения высоты используются шкала мензурки, поэтому в качестве единиц измерения указаны миллилитры.

Таблица 3.

l , мл	U_x , В	U_R , В	R , кОм
20	3,85	1,05	7,3
40	3,96	0,94	8,4
60	4,06	0,84	9,7
80	4,14	0,76	10,9
100	4,20	0,70	12,0
120	4,25	0,65	13,1
140	4,31	0,59	14,6
160	4,35	0,55	15,8
180	4,38	0,52	16,8
200	4,40	0,50	17,6
220	4,44	0,46	19,3
240	4,47	0,43	20,8

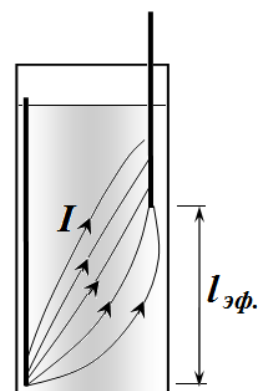
График этой зависимости показан на рисунке.



4.2 Примерное распределение токов в этом случае показано на следующем рисунке.

4.3 В этом случае расстояние между спицами играет роль некоторой эффективной длины проводника, поэтому сопротивление воды между спицами в этом случае оказывается примерно линейно зависящим от l , что и подтверждается экспериментальными данными. Дополнительное сопротивление может быть связано с ограничением токов вблизи острия спиц. Функционально данная зависимость описывается формулой

$$R_x = al + b \quad (12)$$



4.4 Согласно приведенным экспериментальным данным линейная зависимость выполняется во всем диапазоне высот l .

Возможны отклонения от линейной зависимости при малых и больших значениях l . Однако, в диапазоне $l \in [50, 150]$ исследуемая зависимость линейна.

Параметры функции (12), рассчитанные по методу наименьших квадратов равны

$$\begin{aligned} a' &= (0,060 \pm 0,002) \text{кОм} / \text{дел.} \\ b &= (6,0 \pm 0,3) \text{кОм} \end{aligned} \quad (11)$$

Если высоты h измерять в миллиметрах, то значение коэффициента a становится равным

$$a = (0,071 \pm 0,002) \text{кОм} / \text{мм} \quad (12)$$

Часть 5.

5.1 Для оценки удельного сопротивления воды предпочтительнее использовать данные из Части 4. Линейность полученной зависимости свидетельствует, что в средней части сосуда линии тока примерно параллельны стенкам сосуда. Также можно предположить, что в этой области ток протекает через все поперечное сечение воды в сосуде. Следовательно, можно воспользоваться формулой для сопротивления, приведенной в условии задачи.

Полученное значение коэффициента наклона графика (12) представляет собой сопротивление одного миллиметра столба воды, что дает возможность оценить ее удельное электрическое сопротивление

$$a = \frac{\Delta R}{\Delta l} = \frac{\rho}{S} \Rightarrow \rho = aS = a \frac{V_0}{h_0}. \quad (7)$$

Подстановка численных значений дает

$$\rho = a \frac{V_0}{h_0} = 0,071 \frac{10^3 \text{Ом}}{10^{-3} \text{м}} \cdot \frac{200 \cdot 10^{-6} \text{м}^3}{170 \cdot 10^{-3} \text{м}} \approx 83 \text{Ом} \cdot \text{м} \quad (8)$$