4. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ при всех положительных x.

Ответ: при всех $k \leqslant 1$.

Решение. То, что все $k \leqslant 1$ удовлетворяют условию задачи, следует из того, что для любой убывающей функции g, например, $g(x) = \frac{1}{x}$, выполнено неравенство $g(x) > g(x + g(x)) \geqslant kg(x + g(x))$.

Предположим, что функция g удовлетворяет условию задачи при некотором $k > 1$. Положим $s = \frac{1}{k}$, тогда $g(x + g(x)) \leqslant sg(x)$.

Определим последовательность (x_n) условиями $x_0 = x$, $x_{n+1} = x_n + g(x_n)$. По условию $g(x_{n+1}) \leqslant sg(x_n)$, поэтому $g(x_n) \leqslant s^n g(x)$. Так как

$$x_n = x_0 + g(x_0) + g(x_1) + \ldots + g(x_{n-1}) \leqslant x + g(x) + sg(x) + \ldots + s^{n-1}g(x) =$$

$$= x + (1 + s + \ldots + s^{n-1})g(x) < x + \frac{1}{1-s}g(x),$$

имеем $g(x_n) > g(x + \frac{1}{1-s}g(x))$. Следовательно, $g(x + \frac{1}{1-s}g(x)) < s^n g(x)$ при любом натуральном n, что, очевидно, невозможно, так как $g(x + \frac{1}{1-s}g(x)) > 0$. Полученное противоречие и доказывает, что случай $k > 1$ невозможен.

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Точки M, N и K – точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке.

Решение. Нам потребуется следующая

Лемма. Пусть T – точка пересечения продолжений боковых сторон PS и QR трапеции $PQRS$. Тогда радикальная ось окружностей, построенных на диагоналях PR и QS, как на диаметрах, есть высота треугольника TPQ, опущенная из вершины T.

Доказательство. Рассмотрим наряду с окружностями ω_1 и ω_2, построенными на PR и QS, как на диаметрах, окружность ω с диаметром PQ. Общая хорда ω и ω_1 – это высота, опущенная из P на QR, а общая хорда ω и ω_2 – это высота, опущенная из Q на PR. Точка пересечения этих высот, ортоцентр треугольника TPQ, имеет равные степени относительно окружностей ω_1 и ω_2, а потому лежит на их радикальной оси. Аналогично на их радикальной оси лежит ортоцентр треугольника TRS. Поскольку перпендикуляр, опущенный из T на PQ, проходит через оба этих ортоцентра, он и является радикальной осью ω_1 и ω_2.

Применяя лемму к трапеции $ABDE$, мы найдём, что перпендикуляр, опущенный из M на AB, является радикальной осью окружностей, построенных на AD и BE, как на диаметрах. Аналогично, рассматривая трапеции $CDFA$ и $EFBC$, мы получим, что перпендикуляр, опущенный из N на CD, есть радикальная ось окружностей, построенных на AD и CF, а перпендикуляр, опущенный из K на EF, есть радикальная ось окружностей, построенных на CF и BE, как на диаметрах. Следовательно, эти три перпендикуляра (среди которых, очевидно, нет параллельных) пересекаются в одной точке – радикальном центре этих трёх окружностей.

6. Натуральное число q назовём *удобным знаменателем* для вещественного α, если $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ при некотором целом p. Докажите, что если у двух иррациональных чисел α и β множества удобных знаменателей совпадают, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ – целое число.

Решение.

Пусть $q_1 < q_2 < \ldots$ – все удобные знаменатели для чисел α и β. Очевидно, для каждого q_i существует только одно целое p_i такое, что $|q_i\alpha - p_i| < \frac{1}{10}$, это p_i мы назовём соответствующим q_i *удобным числителем.*

Сначала разберём случай, когда $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{10}$. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots$ – удобные числители для α, а $p'_1 < p'_2 < \ldots$ – удобные числители для β. Докажем индукцией по i, что $p_i = p'_i$ при всех натуральных i. Очевидно, $p_1 = p'_1 = 0$. Пусть $p_k = p'_k$. Если $q_{k+1} = q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k$ (так как $|p_k - q_k\alpha| < \frac{1}{10}$ и $|p_{k+1} - q_{k+1}\alpha| = |p_k - q_k\alpha - \alpha| < \frac{1}{10}$) и аналогично $p'_{k+1} = p'_k$, откуда $p_{k+1} = p'_{k+1}$. Если же $q_{k+1} > q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k + 1$. Действительно, в возрастающей арифметической прогрессии с первым членом $(q_k + 1)\alpha$ и разностью $\alpha < \frac{1}{10}$ первый член меньше $(p_k + 1) - \frac{1}{10}$, следовательно, должны быть и члены, отстоящие от $p_k + 1$ менее, чем на $\frac{1}{10}$. Аналогично $p'_{k+1} = p'_k + 1$, и наше утверждение доказано.

Поскольку $|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{10}$ и $|q_k\beta - p_k| < \frac{1}{10}$, получаем, что $|q_k(\alpha - \beta)| < \frac{1}{5}$ при всех k, откуда $\alpha = \beta$.

В случае, когда α и β произвольны, рассмотрим числа $q_1\alpha$ и $q_1\beta$. Изменяя при необходимости знаки, мы можем считать, что $0 < \{q_1\alpha\}, \{q_1\beta\} < \frac{1}{10}$. Поскольку для чисел $q_1\alpha$ и $q_1\beta$ условие задачи также выполнено, оно выполнено и для чисел $\{q_1\alpha\}$ и $\{q_1\beta\}$, поэтому $\{q_1\alpha\} = \{q_1\beta\}$. Это означает, что $q_1\alpha - q_1\beta = r$ – целое число, то есть разность $\alpha - \beta = \frac{r}{q_1}$ рациональна.

Предположим, что число $\frac{r}{q_1}$ не целое. Тогда $\frac{1}{3} \leqslant \{\frac{kr}{q_1}\} \leqslant \frac{2}{3}$ для некоторого k. Воспользуемся тем, что для любых u и v, $0 \leqslant u < v \leqslant 1$, в любой арифметической прогрессии с иррациональной разностью ϑ существует член, дробная часть которого лежит на интервале (u, v). В частности, для некоторого натурального n число $(nq_1 + k)\alpha$ отстоит от ближайшего целого менее, чем на $\frac{1}{10}$. Но при этом и $(nq_1 + k)\beta$ должно отстоять от ближайшего целого менее, чем на $\frac{1}{10}$, что противоречит тому, что $\{(nq_1 + k)\alpha - (nq_1 + k)\beta\} = \{nr + \frac{kr}{q_1}\} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.