XIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2017

15 января 2017 года, 9.00-13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Первые k членов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ последовательности (a_n) – различные натуральные числа, а при $n > k$ число a_n – наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел a_1, a_2, …, a_{n-1}. Докажите, что $a_n = 2a_{n-1}$ при всех достаточно больших n.

5. Для каждого натурального k обозначим через $C(k)$ сумму всех различных простых делителей числа k. Например, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Найдите все натуральные n, для которых $C(2^n + 1) = C(n)$.

6. В пространстве даны правильный тетраэдр $ABCD$ и произвольные точки M и N. Докажите неравенство

$$MA \cdot NA + MB \cdot NB + MC \cdot NC \geqslant MD \cdot ND.$$

(Тетраэдр называется *правильным*, если все шесть его рёбер равны.)

XIII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2017

January 15, 9.00-13.30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

4. Initial terms a_1, a_2, …, a_k of a sequence (a_n) are different positive integers, and for $n > k$ the number a_n is the minimum positive integer not representable as a sum of some of the numbers a_1, a_2, …, a_{n-1} (maybe one of them). Prove that $a_n = 2a_{n-1}$ for all large enough n.

5. Let $C(k)$ denotes the sum of all different prime divisors of a positive integer k. For example, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Find all positive integers n such that $C(2^n + 1) = C(n)$.

6. A regular tetrahedron $ABCD$ and points M, N are given in space. Prove the inequality

$$MA \cdot NA + MB \cdot NB + MC \cdot NC \geqslant MD \cdot ND.$$

(A tetrahedron is called *regular* if all its six edges are equal.)