XI International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2015

January 14, 9.00-13.30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

4. Determine the maximum integer n such that for each positive integer $k \leqslant \frac{n}{2}$ there are two positive divisors of n with difference k.

5. Let A_n be the set of partitions of the sequence $1, 2, \ldots, n$ into several subsequences such that every two neighbouring terms of each subsequence have different parity, and B_n the set of partitions of the sequence $1, 2, \ldots, n$ into several subsequences such that all the terms of each subsequence have the same parity (for example, the partition $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ is an element of A_9, and the partition $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ is an element of B_6).

Prove that for every positive integer n the sets A_n and B_{n+1} contain the same number of elements.

6. The area of a convex pentagon $ABCDE$ is S, and the circumradii of the triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB are R_1, R_2, R_3, R_4, R_5. Prove the inequality

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geqslant \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$

XI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2015

14 января 2015 года, 9.00-13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого натурального $k \leqslant \frac{n}{2}$ найдутся два натуральных делителя n с разностью k.

5. Обозначим через A_n множество разбиений последовательности $1, 2, \ldots, n$ на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых любые два соседних члена имеют разную чётность, а через B_n – множество разбиений последовательности $1, 2, \ldots, n$ на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых все члены имеют одинаковую чётность (например, разбиение $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ является элементом A_9, а разбиение $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ является элементом B_6).

Докажите, что при каждом натуральном n множества A_n и B_{n+1} содержат одинаковое количество элементов.

6. Площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равна S, а радиусы описанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB – R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5. Докажите неравенство

$$R_1^4 + R_2^4 + R_3^4 + R_4^4 + R_5^4 \geqslant \frac{4}{5\sin^2 108^\circ} S^2.$$