XII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2016

16 января 2016 года, 9.00-13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ при всех положительных x.

2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Точки M, N и K – точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке.

3. Натуральное число q назовём *удобным знаменателем* для вещественного числа α, если $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ при некотором целом p. Докажите, что если у двух иррациональных чисел α и β множества удобных знаменателей совпадают, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ – целое число.

XII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2016

January 16, 2016, 9:00-13:30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

1. Find all $k > 0$ for which a strictly decreasing function $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ exists such that $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ for all positive x.

2. A convex hexagon $ABCDEF$ is given such that $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. The points M, N, K are common points of the lines BD and AE, AC and DF, CE and BF respectively. Prove that perpendiculars drawn from M, N, K to lines AB, CD, EF respectively are concurrent.

3. We call a positive integer q *a convenient denominator* for a real number α if $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ for some integer p. Prove that if two irrational numbers α and β have the same set of convenient denominators then either $\alpha + \beta$ or $\alpha - \beta$ is an integer.