XII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2016

15 января 2016 года, 9.00-13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. В результате получаются четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$. Докажите, что они имеют равные площади.

2. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ – перестановка чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{100}$?

3. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.

XII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2016

January 15, 2016, 9:00-13:30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with centre O. Its diagonals meet at M. The circumcircle of ABM intersects the sides AD and BC at N и K respectively. Quadrilaterals $NOMD$ and $KOMC$ are thus obtained. Prove that their areas are equal.

2. The numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ are a permutation of the numbers 1, 2, $\ldots$, 100. Let $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. What maximum number of perfect squares can be among the numbers $S_1, S_2, \ldots, S_{100}$?

3. There are 60 towns in Graphland; every two towns are connected with a one-way road. Prove that one can colour four towns red and another four towns green so that every road between a red town and a green town is directed from the red town to the green one.