XI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2015

13 января 2015 года, 9.00-13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или голубой цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Точка K симметрична M относительно AC. Прямая BK пересекает AC в точке P. Докажите, что если $\angle AMP = \angle CMN$, то $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

XI International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2015

January 13, 9.00-13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Each point with integral coordinates in the plane is coloured white or blue. Prove that one can choose a colour so that for every positive integer n there is a triangle of area n with three vertices of the chosen colour.

2. Inside the triangle ABC a point M is given. The line BM meets the side AC at N. The point K is symmetrical to M with respect to AC. The line BK meets AC at P. If $\angle AMP = \angle CMN$, prove that $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Determine all the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2 f(x) + y^2 f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.