1. Неравнобедренный остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Пусть H – точка пересечения высот этого треугольника, а M – середина стороны AB. На дуге AB окружности ω, не содержащей точку C, взяты точки P и Q такие, что $\angle ACP = \angle BCQ < \angle ACQ$. Пусть R и S – основания перпендикуляров, опущенных из точки H на прямые CQ и CP соответственно. Докажите, что точки P, Q, R и S лежат на одной окружности, а точка M является центром этой окружности.

Решение. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, а L – точка пересечения прямых CC_1 и PQ. Без ограничения общности будем считать, что точка H лежит внутри угла ACQ. Заметим, что точки C, A_1, B_1, R, S и H лежат на окружности с диаметром CH. Из условия задачи понятно, что $PQ \parallel AB$. Поэтому $\angle HLQ = 90°$. Значит, точки H, R, Q и L лежат на окружности с диаметром HQ. Следовательно, $\angle CSR = \angle CHR = \angle RQL = \angle RQP$, то есть точки P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Так как $\angle AA_1B = \angle BB_1A = 90°$, то $MA_1 = MB_1 = AB/2$. Поэтому точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1.

Также из равенств $\angle A_1CR = \angle BCQ = \angle ACP = \angle B_1CS$ следует, что A_1B_1SR – равнобочная трапеция. Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1 и RS совпадают. Значит M лежит на серединном перпендикуляре к RS. Но с другой стороны, так как $APQB$ – равнобочная трапеция, M также лежит на серединном перпендикуляре к PQ. Следовательно, M – центр окружности, на которой лежат точки P, Q, R и S.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x))$ для любых вещественных x и y.

Ответ: $f(x) = x$; $f(x) \equiv 0$; $f(x) = \begin{cases} 0, x \neq -a^2, \\ a, x = -a^2 \end{cases}$ с произвольным $a \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

Решение: Подставляя $y = 0$ в данное уравнение

$$(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x)), \tag{1}$$

находим, что $f(0) = 0$. Заменяя y на $-y$ в (1), получаем $(x+y^2)f(-yf(x)) = -xyf(y^2+f(x)) = -(x + y^2)f(yf(x))$, откуда

$$(x + y^2)\left(f(yf(x)) + f(-yf(x))\right) = 0 \tag{2}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Обозначим $A = \{x|f(x) = 0\}$. Рассмотрим следующие случаи:

(i) $A = \{0\}$. Положим $x = -y^2$ в (1), тогда $-y^3f(y^2+f(-y^2)) = 0$, откуда $y^2+f(-y^2) = 0$, т.е. $f(t) = t$ при всех $t \leqslant 0$. При $x = 1$ уравнение (2) принимает вид $f(-yf(1)) = -f(yf(1))$, или (поскольку $f(1) \neq 0$) $f(-x) = -f(x)$ при всех x. Следовательно, $f(x) = x$ при всех вещественных x. Легко видеть, что эта функция удовлетворяет нашему уравнению.

(ii) $A = \mathbb{R}$, тогда $f(x) = 0$ при всех x, что, очевидно, является решением (1).

(iii) Пусть $A \neq \{0\}$, $A \neq \mathbb{R}$, то есть, существуют $b \neq 0$, $d \neq 0$ такие, что $f(b) = 0$ и $f(d) \neq 0$; обозначим $f(d) = a$. Подставляя $x = b$ в (1), получим $yf(y^2) = 0$, т.е. $f(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Подставляя затем $x = d$ в (2), находим, что $f(ay) + f(-ay) = 0$, если $y^2 + d \neq 0$. Одно из чисел $f(ay)$, $f(-ay)$ равно нулю, так как $f(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Отсюда при $d > 0$ получаем $f(ay) = f(-ay) = 0$ для всех y, вопреки предположению $f(d) \neq 0$. Таким образом, $d < 0$ и единственным возможным ненулевым значением функции f может быть $f(\pm ay)$ при y, удовлетворяющем условию $y^2 + d = 0$, т.е. $f(\pm a\sqrt{-d})$. Вместе с условием $f(d) \neq 0$ это значит, что $d = \pm a\sqrt{-d}$, то есть $d = -a^2$.

Остаётся проверить, является ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, x \neq -a^2, \\ a, x = -a^2 \end{cases}$ решением уравнения. Если $x \neq -a^2$, уравнение (1) принимает вид $(x + y^2)f(y \cdot 0) = xyf(y^2)$, или $0 = 0$. Пусть теперь $x = -a^2$; тогда нам нужно проверить, выполняется ли равенство $(y^2 - a^2)f(ay) = -a^2yf(y^2 + a)$ при всех y. Заметим, что левая часть этого равенства равна нулю в любом случае ($f(ay) = 0$ при $y \neq -a$ и $y^2 - a^2 = 0$ при $y = -a$). Таким образом, нам нужно, чтобы было $yf(y^2+a)=0$ при всех y. Чтобы это было так, у уравнения $y^2+a=-a^2$ не должно быть вещественного решения $y\neq 0$. Значит, $-a^2-a\geqslant 0$, то есть $a\in(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$ (напомним, что $a\neq 0$).

3. Прямоугольник на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 разбит на фигурки домино (прямоугольники, состоящие из двух клеток с общей стороной). Докажите, что все вершины клеток на границе и внутри прямоугольника можно раскрасить в три цвета так, чтобы для каждых двух вершин, находящихся на расстоянии 1, выполнялось следующее условие: эти вершины разного цвета, если соединяющий их отрезок лежит на границе одной из фигурок домино, и одинакового цвета в противном случае.

Решение. Мы покажем, что существует требуемая раскраска специального вида. Именно, присвоив цветам номера 1, 2 и 3, мы назовём клетку *правой*, если эти цвета встречаются в таком порядке при обходе клетки по часовой стрелке, и *левой* – в противном случае. Тогда, если раскрасить клетки прямоугольника $m\times n$ в шахматном порядке, то существует раскраска требуемого вида, в которой все черные клетки правые, а все белые левые; такую раскраску мы назовём *регулярной*.

Заметим, что регулярная раскраска любой клетки нашего прямоугольника однозначно определена цветом любой из её вершин. Действительно, если эта клетка, скажем, чёрная (и поэтому должна быть правой с точки зрения раскраски вершин), мы можем начать с вершины, цвет которой известен и обойти клетку по часовой стрелке, прибавляя к номеру цвета $1 \bmod 3$, если двигаемся по стороне фигурки домино, и не меняя цвет в противном случае.

Если две клетки имеют общую сторону, применение этой процедуры к одной из их общих вершин даёт один и тот же цвет для другой общей вершины: одна из двух клеток чёрная, а другая белая, а движение по общей стороне является обходом по часовой стрелке для одной клетки и против часовой стрелки для другой. Поэтому если клетка с одной непокрашенной вершиной граничит с двумя клетками, у которых все вершины покрашены регулярным образом, мы можем покрасить последнюю вершину так, чтобы получилась регулярная раскраска. Если клетка с двумя непокрашенными вершинами граничит с клеткой, вершины которой регулярно покрашены, мы можем докрасить две вершины клетки, так, чтобы получившаяся раскраска была регулярной.

Применяя эту процедуру, мы можем покрасить вершины всех клеток прямоугольника. Сначала с помощью шахматной раскраски определим, какие клетки должны быть левыми, а какие правыми. После этого покрасим левую нижнюю клетку, выбрав произвольным образом цвет левого нижнего угла. Это позволит нам поочерёдно раскрасить все вершины клеток нижнего ряда. Затем каждый следующий ряд мы покрасим, начиная с левой клетки: самая левая клетка примыкает к одной клетке, у которой все вершины уже покрашены, а каждая последующая – к двум.