

XIV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2018

13 января 2018 года, 9.00-13.30

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Крокодил загадал четыре клетки таблицы 2018×2018 , образующие прямоугольник со сторонами 1 и 4. Медведь может выбрать в таблице любой квадрат, образованный 9 клетками, и спросить, есть ли в нём хотя бы одна из загаданных клеток. За какое наименьшее количество таких вопросов Медведь наверняка сможет получить утвердительный ответ?

5. Найдите все вещественные a , при которых существует функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x - f(y)) = f(x) + a[y]$ для всех вещественных x и y ($[y]$ обозначает целую часть числа y).

6. В окружность с радиусом R вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Диагонали AD и BE , BE и CF , AD и CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точках M , N и K соответственно. Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM , BCN , CDK , DEM , EFN , AFK соответственно. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 \leq R\sqrt{3}$.