

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

14 января 2017 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
 - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*;
 - Черновые листы;
 - Неиспользованные листы;
 - Отпечатанные условия задачи

Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1А (3,0 балла)

Испытывается новый скорострельный многоствольный пулемет, дающий $n = 100$ выстрелов/с. Скорость полета пули составляет $u = 1000$ м/с, а ее масса равна $m = 10$ г. Мишенью служит вертикально подвешенный на канате ящик с песком, масса которого равна $M = 1000$ кг. Считая, что пули застревают в ящике, определите максимальный угол отклонения ящика с песком от вертикали после начала стрельбы.

Задача 1В (4,0 балла)

В космосе летает мыльный пузырь радиуса R_1 . С помощью внешнего ионизатора мыльную пленку быстро заряжают некоторым положительным зарядом, после чего радиус пузыря через некоторое время перестаёт меняться и становится равным $R_2 = 2R_1$. Найдите электрический заряд q , который был сообщен мыльной пленке, если ее теплоемкость и теплопроводность ничтожно малы. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки не зависит от температуры и равен σ . Воздух считать идеальным двухатомным газом.

Задача 1С (3,0 балла)

В точках S_1 и S_2 (смотрите выданный вам отдельный лист к этой задаче) находятся два одинаковых источника монохроматических когерентных волн с длиной волны λ . На листе длина волны соответствует размеру двух клеток. В точках A_1 и A_2 находятся приемники этих волн. Каждый источник излучает волну с интенсивностью I_0 , изменением амплитуды волны при изменении расстояния до источника можно пренебречь. Построением на том же листе к этой задаче найдите, в каких точках выделенной овалом области следует поместить третий источник, чтобы он полностью подавил сигналы в точках A_1 и A_2 одновременно. Какова должна быть интенсивность волны от третьего источника? Все источники излучают волны с одинаковой фазой и поляризацией, перпендикулярной плоскости рисунка.

Внимание! Произведите все необходимые построения на выданном вам листе к этой задаче, впишите в него свои данные и сложите вместе с листами ответов *Writing sheets*, включив его в общую нумерацию. В противном случае, ваше решение оцениваться не будет!

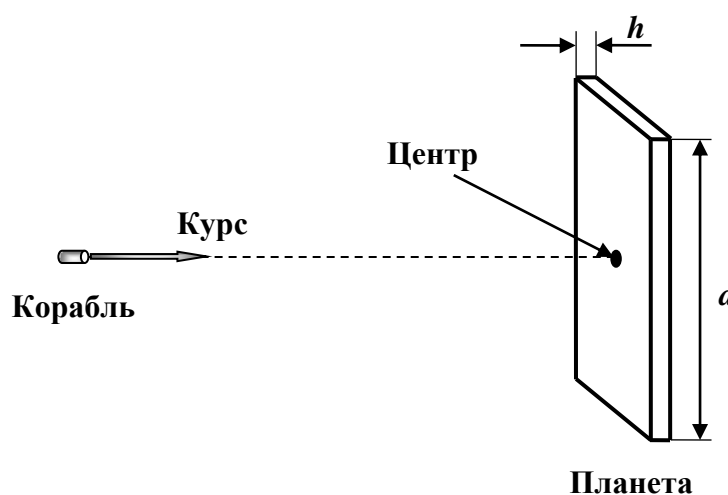
Задача 2 (10,0 балла)

Фантастические путешествия по Вселенной

Разведывательный космический корабль развитой цивилизации бороздит просторы Вселенной. В этой задаче Вам предстоит рассмотреть несколько ситуаций этого межзвездного путешествия с физической точки зрения. Во всех численных расчетах считайте гравитационную постоянную известной и равной $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

1. Планеты диковинных форм (3,9 балла)

На некотором расстоянии от корабля капитан обнаружил первую планету, которая имела странную форму параллелепипеда с квадратным основанием a и очень малой толщиной $h \ll a$. Капитан отдал приказ следовать на планету по курсу, показанному на рисунке.



После выключения двигателей обнаружилось, что ускорение свободного падения корабля g , сообщаемое ему планетой на расстояниях много больших h , пропорционально телесному углу Ω , под которым планета видна с корабля, то есть:

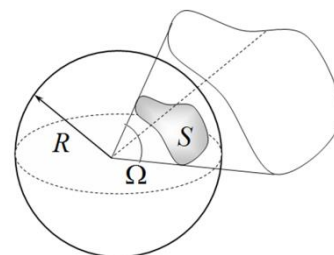
$$g = \alpha \Omega.$$

Телесный угол Ω – это часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Границей телесного угла является некоторая коническая поверхность.

Телесный угол измеряется отношением площади S той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса R сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

Телесные углы измеряются отвлечёнными (безразмерными) величинами. Единицей измерения телесного угла в системе СИ является стерadian, равный телесному углу, вырезающему из сферы радиуса R поверхность с площадью R^2 . Полная сфера образует телесный угол, равный 4π стерadian (полный телесный угол), для вершины, расположенной внутри сферы, в частности, для центра сферы.



Высадившись на поверхность и взяв пробы грунта, ученые сообщили капитану, что планета состоит из однородного материала плотности $\rho_1 = 3000 \text{ кг/м}^3$, а ускорение свободного падения вблизи геометрического центра поверхности практически постоянно и равно $g_1 = 9,81 \times 10^{-2} \text{ м/с}^2$.

1.1 [0,7 балла] Найдите и рассчитайте толщину планеты h .

1.2 [0,5 балла] Найдите и рассчитайте коэффициент α .

Покинув первую планету, капитан и его команда встретили еще более экзотическую планету, которая по форме представляла собой правильную пирамиду, с квадратным основанием со стороной $a = 10000\text{км}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

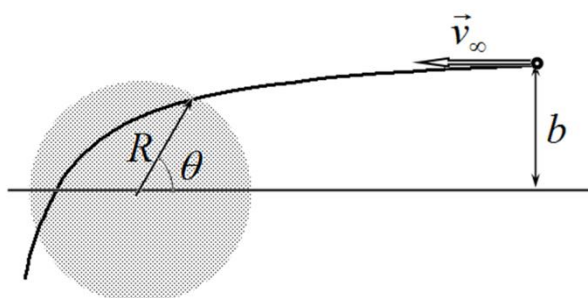
1.3 [0,7 балла] Найдите и рассчитайте ускорение свободного падения g_2 , измеренное на вершине однородной пирамидальной планеты, если ее плотность равна $\rho_2 = 4500\text{кг/м}^3$,

Космический корабль покинул пирамидальную планету с ее вершины, стартовав с второй космической скоростью $v_1 = 3,45\text{км/с}$. Следующей на пути встретилась планета, имеющая форму идеального куба со стороной a . Проведя измерения, капитан и его команда выяснили, что плотность кубической планеты равна $\rho_3 = 5000\text{кг/м}^3$.

1.4 [2,0 балла] Найдите и рассчитайте вторую космическую скорость v_2 при старте корабля с одной из вершин кубической планеты

2. Пылевое облако (6,1 балла)

На пути корабля встречается очень большое массивное пылевое облако радиуса $R = 1,50 \times 10^7\text{км}$ с однородной плотностью $\rho_4 = 50,0\text{кг/м}^3$. Скорость корабля на большом расстоянии от облака равна $v_\infty = 100\text{км/с}$, а прицельное расстояние до центра равно $b = 1,50 \times 10^8\text{км}$. Двигатель корабля выключен.



2.1 [2,5 балла] Найдите и рассчитайте координату входа корабля в пылевое облако, характеризуемую углом θ .

2.2 [2,0 балла] Найдите и рассчитайте минимальное расстояние r_{min} , на котором корабль пролетит от центра облака. Сопротивлением частиц облака движению корабля можно пренебречь.

Определив таким образом, что избежать столкновения с облаком невозможно, капитан корабля включает двигатель, изменяя скорость v_∞ .

2.3 [1,0 балла] Найдите и рассчитайте минимальную скорость $v_{\infty,min}$, при которой корабль минует облако.

Успешно миновав препятствие, капитан и его команда обнаружили, что частицы пылевого облака содержат ценные элементы.

2.4 [0,6 балла] Найдите минимальную работу A , которую необходимо совершить, чтобы постепенно доставить все пылевые частицы на очень удаленный перерабатывающий завод.

Задача 3 (10,0 балла)
Сопротивление призмы
1. Математическое введение (3,0 балла)

По определению считается, что члены числовой последовательности x_0, x_1, x_2, \dots подчиняются рекуррентному соотношению, если каждый последующий из них выражается через предыдущие. Например, для известной вам геометрической прогрессии

$$x_k = \lambda x_{k-1}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, λ – некоторое фиксированное число, а нулевой член последовательности имеет некоторое значение A , то есть $x_0 = A$.

1.1 [0,2 балла] Получите формулу для произвольного члена последовательности x_k в явном виде, т.е. выразите его через номер k , начальное значение A и λ .

Теперь рассмотрим число $\lambda = 2 + \sqrt{3}$. При возведении в целую натуральную степень k , его можно представить в виде

$$\lambda^k = p_k + q_k \sqrt{3}, \quad (2)$$

где p_k, q_k – некоторые целые числа.

1.2 [0,4 балла] Запишите рекуррентные соотношения, выражающие значения p_k, q_k через предыдущие значения p_{k-1}, q_{k-1} . Запишите также обратные соотношения, выражающие p_{k-1}, q_{k-1} через p_k, q_k .

1.3 [0,7 балла] Рассчитайте численные значения коэффициентов p_k, q_k для $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

1.4 [0,2 балла] Выразите число $\lambda^{-k} = (2 + \sqrt{3})^{-k}$ через найденные величины p_k, q_k .

Пусть члены некоторой числовой последовательности подчиняются рекуррентному соотношению

$$x_{k+1} = 4x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

причем известно, что N – некоторое целое число, а $x_0 = A$ и $x_N = B$, A, B – произвольные числа.

1.5 [1,0 балла] Получите формулу для произвольного члена x_k последовательности (3) в явном виде, т.е. выразите его через номер k и величины A, B, N .

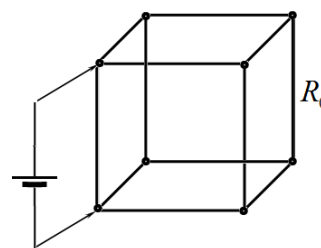
1.6 [0,5 балла] Выразите произвольный член последовательности x_k через величины p_k, q_k , найденные в пп.1.2-1.3.

Подсказка. Решение рекуррентного соотношения (3) нужно искать в виде $x_k = C\lambda^k$, где C – некоторая константа. Найдите, при каких значениях λ это возможно и постройте общее решение, удовлетворяющее заданным условиям.

2. Проволочный каркас в форме призмы (7,0 балла)

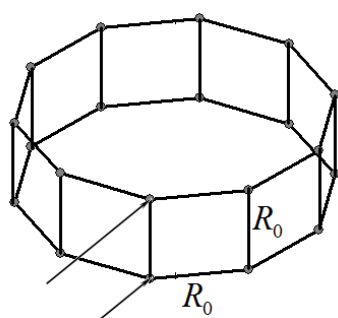
Широко известны задачи, в которых требуется найти электрическое сопротивление простейших проволочных каркасов. Пример одного из таких каркасов в форме куба показан на рисунке внизу. Пусть электрическое сопротивление каждого ребра равно R_0 .

2.1 [0,8 балла] Найдите сопротивление куба при подключении источника к вершинам одного ребра, как показано на рисунке справа.

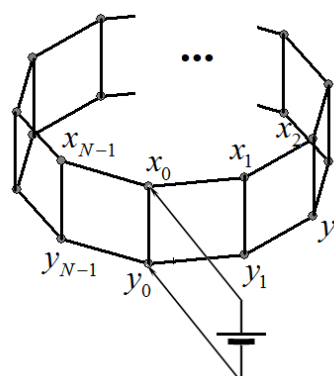


Давайте рассмотрим более общий случай проволочного каркаса в форме правильной призмы с произвольным числом боковых граней N и определим его электрическое сопротивление при подключении источника к вершинам одного из боковых ребер, как показано на рисунке внизу. Сопротивление каждого ребра каркаса равно R_0 .

Для удобства пронумеруем вершины призмы и обозначим их электрические потенциалы: на верхней грани x_k , а на нижней грани y_k , как показано на рисунке внизу. Источник постоянного напряжения подключен к вершинам нулевого ребра. Будем считать, что источник задает потенциалы вершин ребра равными $x_0 = +\varphi_0$ и $y_0 = -\varphi_0$ соответственно.



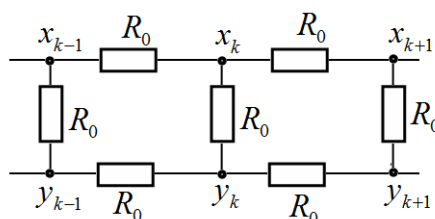
Проволочный каркас в форме призмы



Обозначения потенциалов для узлов призмы

2.2 [0,2 балла] Запишите соотношение, которое связывает значения потенциалов x_k и y_k . Запишите соотношение, которое связывает значения потенциалов x_k и x_{N-k} .

Рассмотрим произвольное боковое ребро призмы, кроме нулевого $k = 0$ и последнего $k = N - 1$. Соответствующая электрическая схема показана на рисунке ниже.



2.3 [1,0 балла] Запишите соотношение, связывающие значения потенциала x_k со значениями потенциалов в соседних вершинах для $k = 1, 2, \dots, N - 2$.

2.4 [0,2 балла] Запишите граничные условия в точках $k = 0$ и $k = N - 1$, позволяющие определить значения потенциалов x_k однозначно.

2.5 [0,2 балла] Найдите явные выражения для потенциалов x_k и y_k для всех значений $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

2.6 [0,4 балла] Выразите значение силы тока, протекающего через источник, через величины φ_0, R_0, N . Используйте найденные в Математическом введении числа p_k, q_k .

- 2.7 [0,2 балла] Получите явную формулу для сопротивления проволочного каркаса R_N , выразив его через величины R_0, p_N, q_N .
- 2.8 [1,0 балла] Рассчитайте точные значения сопротивлений каркаса для $N = 1, 2, 3, 4, 5$.
- 2.9 [0,5 балла] Нарисуйте эквивалентные электрические схемы для «экзотических» призм с $N = 1$ и $N = 2$.
- 2.10 [1,0 балла] Найдите значения сопротивления R_∞ каркаса при $N \rightarrow \infty$.
- 2.11 [1,5 балла] Найдите минимальное значение N , при котором сопротивление призмы отличается от R_∞ не более чем на 2%.