

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРА

## Крутильный маятник (15,0 балла)

## Часть 1. Свободные малые колебания (5,0 балла)

1.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний от длины нитей приведены в Таблице 1. Для каждой длины нитей  $l$  проведено 3 измерения времен по 10 колебаний. Период колебаний  $T$  рассчитан по среднему значению измеренных времен.

Таблица 1.

$l, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$T^2, \text{ с}^2$
61	48,19	48,02	48,34	4,82	23,22
49	43,57	43,31	43,81	4,36	18,98
39	38,56	38,34	38,37	3,84	14,76
28	33,1	32,94	32,78	3,29	10,85
19	26,44	27,03	26,62	2,67	7,13
10	18,91	19,35	19,22	1,92	3,67

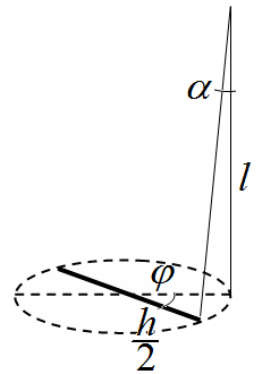
1.2 При повороте болтов в горизонтальной плоскости на малый угол  $\varphi$  нити подвеса отклонятся от вертикали на малый угол  $\alpha$ . Связь между этими углами геометрическая и имеет вид

$$\frac{h}{2}\varphi = l\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{h}{2l}\varphi, \quad (1)$$

где  $l$  – длина нитей подвеса,  $h$  – расстояние между ними.

При таком повороте болты приподнимутся, при этом потенциальная энергия возрастет на величину

$$\Delta U = mgl(1 - \cos \alpha) \approx mgl \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} mgl \left( \frac{h}{2l} \varphi \right)^2. \quad (2)$$



Уравнение закона сохранения энергии при крутильных колебаниях имеет вид

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2} mgl \left( \frac{h}{2l} \varphi \right)^2 = E = const, \quad (3)$$

где  $I$  – момент инерции маятника.

Закон сохранения энергии (3) соответствует гармоническим колебаниям с периодом

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}}. \quad (4)$$

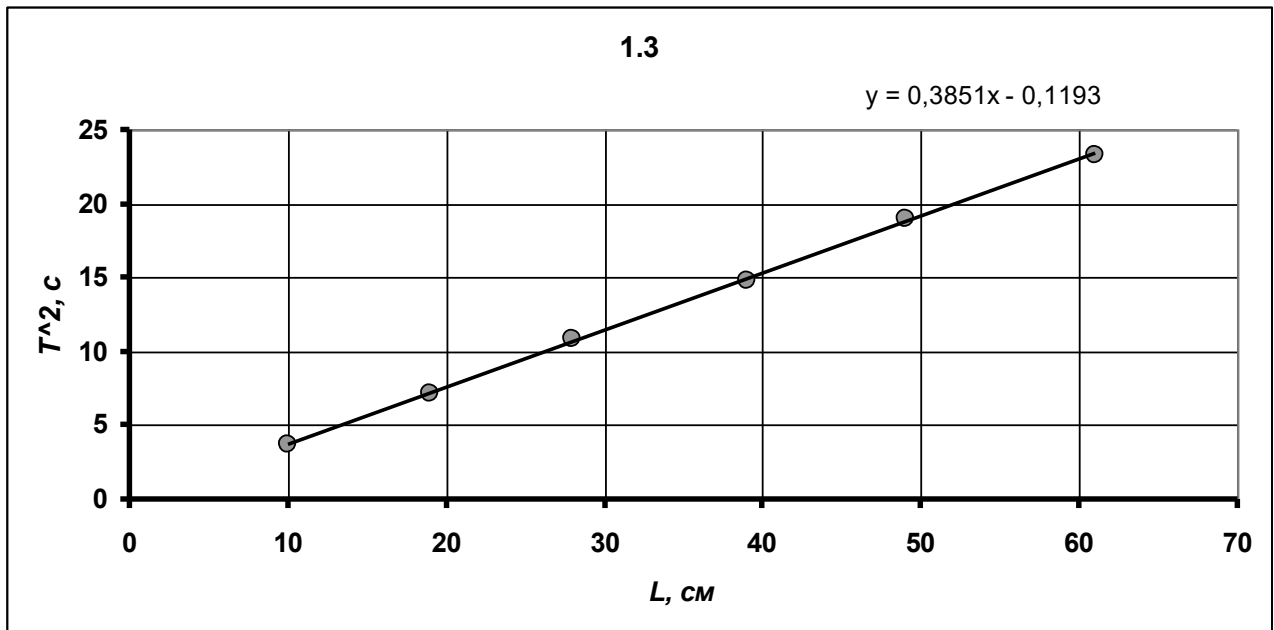
1.3 Для проверки полученной формулы следует построить график зависимости квадрата периода от длины нитей<sup>1</sup> (рис. 1.1) Полученная прямо пропорциональная зависимость доказывает справедливость формулы (4).

Коэффициенты линейной зависимости  $T^2 = al + b$ , рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = (0,385 \pm 0,009) \frac{\text{с}^2}{\text{см}}, \quad b = -(0,12 \pm 0,3) \text{с}^2. \quad (5)$$

Так как  $\Delta b < b$ , то зависимость можно считать прямо пропорциональной.

<sup>1</sup> Допустима и другая линеаризация  $T(\sqrt{l})$ , двойной логарифмический масштаб (с доказательством того, что коэффициент наклона равен 0,5)



**1.4** Из формулы (4) следует, что период колебаний может быть выражен через радиус инерции следующим образом

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}} = 4\pi \sqrt{\frac{mR^2}{mg} \frac{l}{h^2}} = \frac{4\pi R}{h\sqrt{g}} \sqrt{l}. \quad (6)$$

Следовательно, найденный коэффициент наклона графика 1.3 позволяет рассчитать радиус инерции по формуле

$$a = \left( \frac{4\pi R}{h\sqrt{g}} \right)^2 \Rightarrow R = h \frac{\sqrt{ag}}{4\pi} = 4,33 \text{ см}. \quad (7)$$

Расстояние между нитями  $h = (2,8 \pm 0,1) \text{ см}$ .

Погрешность найденного значения рассчитывается по формуле

$$\Delta R = R \sqrt{\left( \frac{\Delta h}{h} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a} \right)^2} = 4,33 \sqrt{\left( \frac{0,1}{2,8} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{0,009}{0,385} \right)^2} = 0,16 \text{ см}. \quad (8)$$

## Часть 2. Малые колебания с дополнительным натяжением (5,0 балла)

**2.1** Результаты измерений зависимости периода колебаний от силы натяжения нитей приведены в таблице 2.

Таблица 2.

z, мм	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	t <sub>3</sub> , с	T, с	T <sup>-2</sup> , с <sup>-2</sup>
12	10,22	10,28	10,40	1,03	0,94
20	7,10	7,03	7,18	0,71	1,98
27	5,63	5,62	5,69	0,56	3,14
37	4,53	4,50	4,53	0,45	4,89
52	3,75	3,88	3,87	0,38	6,81

2.2 Момент возвращающей силы при наличии натяжения нитей  $\vec{F}$  пропорционален углу закручивания и модулю силы натяжения. Изменение силы натяжения при закручивании является поправкой более высоко порядка.

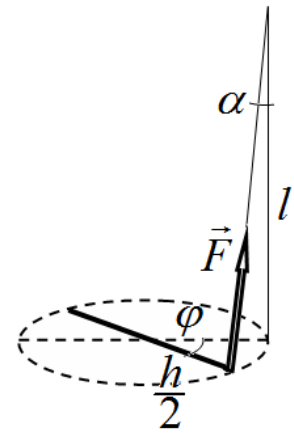
Поэтому уравнение вращательного движения в данном случае имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -kF\varphi. \quad (9)$$

Следовательно, период этих колебаний обратно пропорционален корню из натяжения нитей

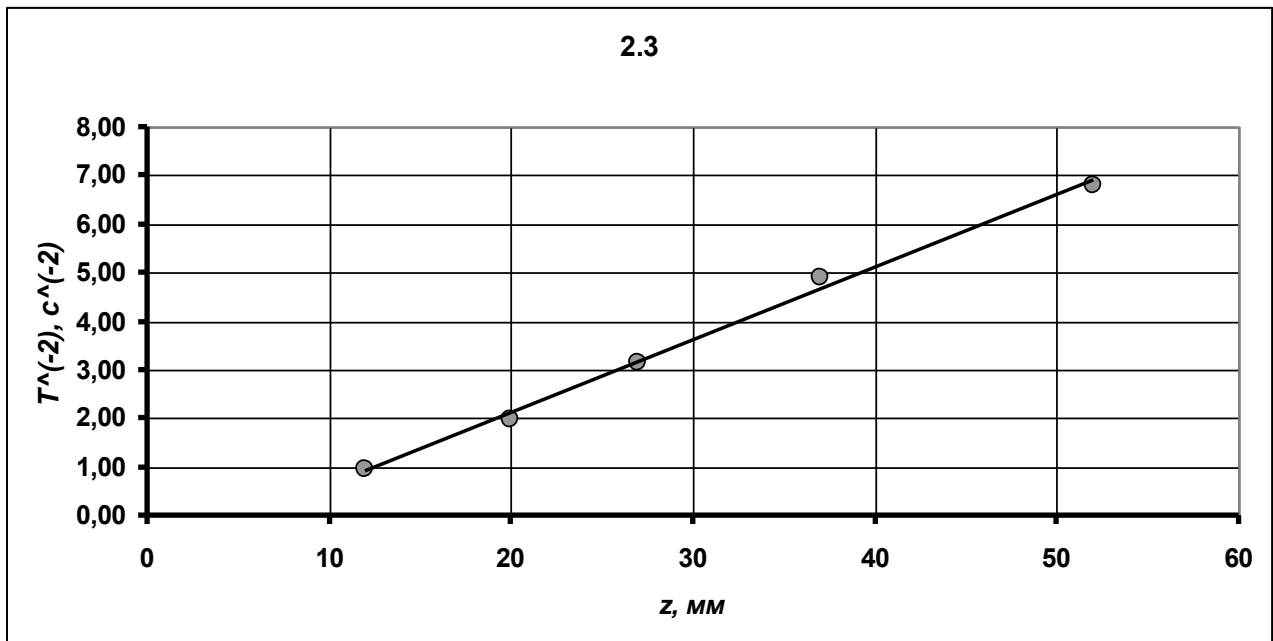
$$T = \frac{C}{\sqrt{F}} = \frac{A}{\sqrt{z}}, \quad (10)$$

где  $C, A$  – некоторые постоянные величины.



2.3 Для проверки данной зависимости следует построить график зависимости  $T^{-2}(z)$ . Другие виды линеаризации в данном случае менее надежны, так как при измерении деформации  $z$  почти неизбежно появление некоторой постоянной составляющей.

График зависимости  $T^{-2}(z)$  показан на рис. 2.3.



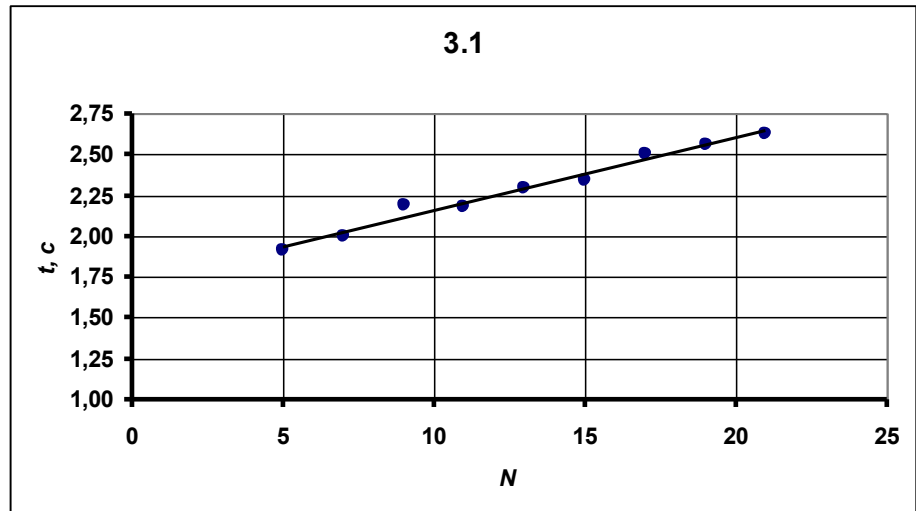
Полученная линейная зависимость подтверждает теоретический вывод о виде зависимости периода от силы натяжения нитей.

### Часть 3. Закручивание на большие углы (5,0 балла)

3.1 Зависимость времени раскручивания от угла закручивания приведена в таблице 3 и на рис. 3.1

Таблица 3.

$N$	$t, s$
5	1,91
7	2,00
9	2,19
11	2,18
13	2,29
15	2,34
17	2,50
19	2,56
21	2,63

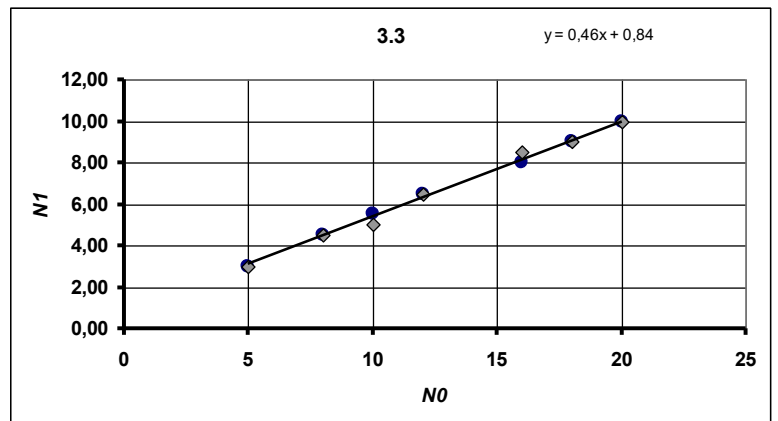


3.2 Время раскручивания можно считать как четверть периода колебаний. Время раскручивания увеличивается с ростом «амплитуды», это означает, что потенциальная энергия возрастает медленнее, чем при гармонических колебаниях, т.е.  $\gamma < 2$ .

3.3. Зависимость числа полуоборотов  $N_1$  при повторном закручивании от начального закручивания  $N_0$  приведена в таблице 4 и на графике 3.3. Полученные зависимости практически не зависят от силы натяжения нитей.

Таблица 4.

	$z = 35mm$	$z = 20mm$
$N_0$	$N_1$	$N_1$
20	10,0	10,0
18	9,0	9,0
16	8,0	8,5
12	6,5	6,5
10	5,5	5,0
8	4,5	4,5
5	3,0	3,0



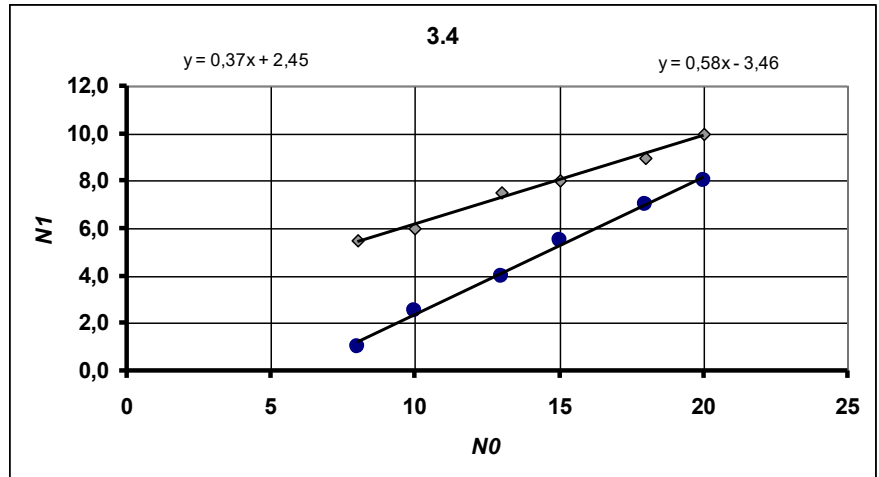
Данная зависимость может быть описана линейной функцией

$$N_1 = 0,46N_0 + 0,84. \tag{11}$$

**3.4-3.5** Зависимости числа полуоборотов  $N_1$  при повторном закручивании от начального закручивания  $N_0$  при подъеме с грузом и подъеме без груза приведены в таблице 5 и на графике 3.4. Полученные зависимости являются линейными. Существенно, что при подъеме без дополнительного груза значения  $N_1$  заметно выше, что говорит о подкачке энергии в ходе опускания груза. Кроме того, последнюю зависимость нельзя считать прямо пропорциональной.

Таблица 5.

	С грузом	Без груза
$N_0$	$N_1$	$N_1$
20	8,0	10,0
18	7,0	9,0
15	5,5	8,0
13	4,0	7,5
10	2,5	6,0
8	1,0	5,5



Полученные зависимости могут быть описаны линейными функциями

$$N_1 = 0,58N_0 - 3,5$$

$$N_1 = 0,37N_0 + 2,5$$

(12)

**Схема оценивания**

	Критерии оценивания	Всего	Баллы
	<b>Часть 1.Свободные малые колебания.</b>	<b>5</b>	
<b>1.1</b>	<b>Оценивается, если результаты измерений периодов отличаются от официальных не более чем на 25%.</b>	<b>2</b>	
	Число различных значений длины: 5 и более (3-4; меньше 3);		0,8(0,4;0)
	Периоды измерены по времени Не менее 10 колебаний (5-9; менее 5);		0,3(0,1;0)
	Рассчитаны периоды для всех измерений;		0,2
	Диапазон изменения длины Не менее 40 см (30-40 см, 20-30 см; менее 20 см)		0,7 (0,5;0,3;0)
<b>1.2</b>	Вывод теоретической формулы:  Получена точная формула $T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}}$ ;  Получен только вид зависимости $T = A\sqrt{l}$ (или не верный коэффициент при $\sqrt{l}$ )	<b>0,5</b>	0,5  (0,2)
<b>1.3</b>	<b>Оценивается, если оценены результаты измерений п. 1.1!</b> Предложена правильная линеаризация $T^2(l)$ , $T(\sqrt{l})$ ; Предложена линеаризация $\ln T(\ln l)$ Доказана степень 1/2	<b>1</b>	0,5 (0,2) (0,3)
	Построение графика (не линеаризованная зависимость не оценивается): - оси подписаны и оцифрованы;		0,1

	- Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1
	Получена линейная зависимость;		0,2
<b>1.4</b>	<b>Оценивается, если оценены результаты измерений п. 1.1!</b> Радиус инерции рассчитан по всем значениям периодов; <i>Расчет по 2 точкам;</i> <i>Расчет по 1 точке;</i>	<b>1,5</b>	0,3 (0,2) (0,1)
	Найден коэффициент наклона линеаризованной зависимости: По МНК; <i>Графически;</i>		0,2 (0,1)
	Измерено расстояние между нитями Указана погрешность		0,1 0,1
	Формула для расчета радиуса инерции		0,1
	Численное значение радиуса инерции в диапазоне: 4,2 – 4,4 см (4,0 – 4,6 см; вне диапазона)		0,4(0,2;0)
	Расчет погрешности: - погрешность коэффициента наклона; - погрешность расстояния между нитями; - общая погрешность;		0,1 0,1 0,1
	<b>Часть 2. Малые колебания с натяжением</b>	<b>5</b>	
<b>2.1</b>	<b>Оценивается, если результаты измерений периодов отличаются от официальных не более чем на 50%.</b>	<b>2</b>	
	Число различных значений натяжения: 5 и более (3-4; меньше 3);		0,8(0,4;0)
	Периоды измерены по времени Не менее 10 колебаний (5-9; менее 5);		0,3(0,1;0)
	Рассчитаны периоды для всех измерений;		0,2
	Диапазон изменения периодов колебаний Не менее чем в 2,5 раза (2,0 раза, 1,5 раз; менее)		0,7 (0,5;0,3;0)
<b>2.2</b>	Вывод теоретической формулы: Обоснована формула $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ (постоянство силы натяжения, возвращающий момент пропорционален $F$ , уравнение колебаний); Указан вид зависимости $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ (без доказательства)	<b>1</b>	1,0 (0,3; 0,3; 0,4)  (0,2)
<b>2.3</b>	<b>Оценивается, если оценены результаты измерений п. 2.1!</b> Предложена правильная линеаризация $T^{-2}(z)$ ; <i>Предложена линеаризация <math>T\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)</math></i> <i>Предложена линеаризация <math>\ln T(\ln l)</math>, Доказана степень 1/2</i>	<b>2</b>	1,0  (0,5)  (0,3+0,2)
	Построение графика (не линеаризованная зависимость не оценивается): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Получена линейная зависимость;		0,7
	<b>Часть 3. Закручивание на большие углы</b>	<b>5</b>	
<b>3.1</b>	<b>Оценивается, если результаты измерений времен отличаются от официальных не более чем на 50%.</b>	<b>1,0</b>	

	Число различных значений $N$ : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,4 (0,2;0)
	Проведено не менее 3 повторных измерений;		0,1
	Получена возрастающая зависимость $t(N)$		0,2
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
<b>3.2</b>	Показатель степени $\gamma < 2$ Обоснование: $U$ возрастает медленнее, чем при гармонических колебаниях	<b>0,3</b>	0,2 0,1
<b>3.3</b>	<b>Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,35-0,65</b>	<b>1,5</b>	
	Число различных значений $N_0$ : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,5(0,2;0)
	Проведено не менее 3 повторных измерений;		0,1
	Получена линейная возрастающая зависимость;		0,2
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2
	Коэффициенты наклона одинаковы для двух натяжений;		0,1
<b>3.4</b>	<b>Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,25-0,65</b>	<b>1</b>	
	Число различных значений $N_0$ : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,3(0,1;0)
	Получена линейная возрастающая зависимость;		0,1
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2
<b>3.5</b>	<b>Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,25-0,75 и есть сдвиг прямой!</b>	<b>1,2</b>	
	Число различных значений $N_0$ : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,4(0,2;0)
	Получена линейная возрастающая зависимость со сдвигом вверх;		0,2+0,1
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2