

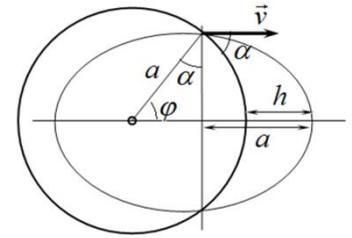
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10,0 балла)

Задача 1А (4,0 балла)

При кеплеровом движении энергия, как и период, зависит только от большой полуоси, поэтому большая полуось орбиты брошенного камня равна радиусу планеты ($a = R$), а стартовая точка находится на малой полуоси, т.к. удалена от фокуса на a (см. рис.). Из рисунка получаем



$$R + h = a \sin \alpha + a$$

$$h = R \sin \alpha$$

Этот результат можно также получить, решив систему из законов сохранения энергии и момента импульса.

Дальность полёта равна $l = 2R\varphi = 2R\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Найдена максимальная высота	2
	ЗСЭ	0,5
	ЗСМИ	0,5
	Решена система	1
	или	
	Есть соотношение $a = R$	0,5
	Оно обосновано	0,5
2.	Есть рисунок с длинами и углами	0,5
	Ответ	0,5
	Найден угол φ ($\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$)	1
	Ответ на второй вопрос	1
Итого		4.0

Задача 1В (3,0 балла)

По определению теплоемкость равна

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + P\Delta V}{\Delta T} = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}. \tag{1}$$

Пусть в требуемой точке параметры газа равны (P_0, V_0, T_0) . Тогда уравнение процесса имеет следующий вид

$$\frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} = 2. \tag{2}$$

Для малых изменений получаем

$$\frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\Delta T}{T_0} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = -\frac{V_0}{T_0}. \tag{4}$$

Окончательно, с учётом равенства $P_0 V_0 = RT_0$, получаем

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V - P_0 \frac{V_0}{T_0} = C_V - R = \frac{R}{2}. \tag{5}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Присутствует выражение для C через производную	1.0
2.	Эта же производная найдена в точке A	1.0
3.	Есть правильный ответ ($C_V - R$ или $R/2$)	1.0
Итого		3.0

Задача 1С (3,0 балла)

Из соображений размерности потенциал в центре равномерно заряженного по объёму шара относительно бесконечно удаленной точки равен

$$\varphi \sim k \frac{q}{R} \sim \alpha \frac{\rho R^3}{R} \sim \alpha \rho R^2, \quad (1)$$

где α – коэффициент пропорциональности, одинаковый для всех шаров.

Нашу систему зарядов можно представить как результат суперпозиции шара радиусом R , заряженного с плотностью $+\rho$, и шара радиусом r , заряженного с плотностью -2ρ . Тогда для потенциала в центре имеем

$$\alpha \rho R^2 + \alpha (-2\rho) r^2 = 0, \quad (2)$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \sqrt{2}. \quad (3)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Для потенциала в центре присутствует формула $\varphi \sim \rho R^2$	1.0
	Приведён вывод этой формулы	1.0
	Неправильный коэффициент пропорциональности из-за вычислительных ошибок	- 0.5
	Расчёт потенциала идейно неправилен	0 за п.1
2.	Применён принцип суперпозиции	0.5
3.	Правильный ответ для сфер	0.5
Итого		3.0

Задача 2. Равновесие с энергетической точки зрения (10,0 балла)**1. Введение (1,0 балла)**

1.1 [1,0 балла] Изменение поверхностной энергии взаимодействия жидкости с твердым телом можно представить в виде

$$\Delta U_s = -(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta S. \quad (1)$$

Рассматривая малый отрезок Δl на границе капли можно записать условие его равновесия

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta l = \sigma_0 \Delta l \cos \theta. \quad (2)$$

Из этих формул следует, что

$$\Delta U_s = -\sigma_0 \cos \theta \Delta S. \quad (3)$$

2. Вода в вертикальной цилиндрической трубке (2,0 балла)

2.1 [0,5 балла] Формула для изменения поверхностной энергии ΔU_s системы при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh имеет вид

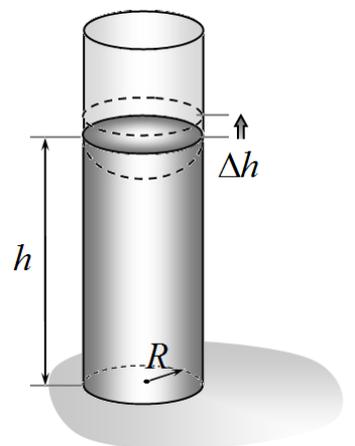
$$\Delta U_s = -\sigma_0 \cos \theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi R \Delta h, \quad (4)$$

где $\Delta S = 2\pi R \Delta h$ – изменение площади соприкосновения жидкости с внутренней поверхностью трубки.

2.2 [0,5 балла] Формула для изменения потенциальной энергии жидкости в поле тяжести ΔU_G при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh записывается в виде

$$\Delta U_G = \pi R^2 \Delta h \rho g h. \quad (5)$$

При ее выводе учтено, что масса жидкости $\Delta m = \pi R^2 \Delta h \rho$ поднимается на высоту h .



2.3 [1,0 балла] Если $|\Delta U_S|$ превышает величину ΔU_G , то энергия системы при подъеме жидкости будет уменьшаться, следовательно жидкость будет продолжать подъем, в противном случае жидкость начнет опускаться. Вблизи положения равновесия суммарное изменение энергии должно быть равно нулю, отсюда следует, что

$$\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi R \Delta h = \pi R^2 \Delta h \rho g h \Rightarrow h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R}. \quad (6)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R} = \frac{2 \cdot 0,072 \cdot \cos 20^\circ}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 14 \text{ мм}. \quad (7)$$

3. Вода в вертикальной конической трубке (4,0 балла)

3.1 [0,5 балла] В этом случае формула для изменения поверхностной энергии ΔU_S системы при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh имеет вид

$$\Delta U_S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

Здесь $r = R - h \operatorname{tg} \alpha$ – радиус трубки на высоте h .

3.2 [0,5 балла] Изменение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести ΔU_G при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh определяется формулой

$$\Delta U_G = \pi r^2 \Delta h \rho g h. \quad (9)$$

3.3 [1,0 балла] Как и ранее, условию равновесия соответствует равенство модулей найденных изменений энергии

$$\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos \alpha} = \pi r^2 \Delta h \rho g h, \quad (10)$$

Подставляя выражение для радиуса трубки на высоте h , получим уравнение

$$\frac{2\sigma_0 \cos \theta}{R - h \operatorname{tg} \alpha} = \rho g h \cos \alpha, \quad (11)$$

в котором легко выделить параметр h_0 :

$$\frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R \left(1 - \frac{h}{R} \operatorname{tg} \alpha\right)} = h \cos \alpha \Rightarrow \frac{h_0}{1 - \frac{h}{R} \operatorname{tg} \alpha} = h \cos \alpha, \quad (12)$$

3.4 [1,0 балла] Полученное уравнение является квадратным относительно величины h . Поэтому следует разобраться с его корнями, или их отсутствием. Перепишем уравнение (12) в виде

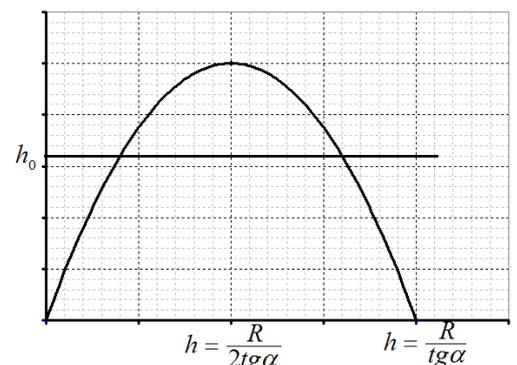
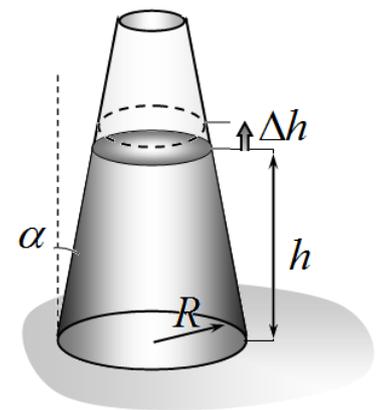
$$h_0 = h \cos \alpha \left(1 - \frac{h}{R} \operatorname{tg} \alpha\right) \quad (13)$$

Квадратичная функция, стоящая в правой части уравнения, имеет нули $h = 0$ и $h = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}$, поэтому она

достигает максимального значения при $h = \frac{R}{2 \operatorname{tg} \alpha}$ и это

значение равно $\frac{R}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cos \alpha$. Следовательно, при

$h_0 > \frac{R}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cos \alpha$ уравнение (12) действительных корней



не имеет. В противном случае $h_0 < \frac{R}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cos \alpha$ имеются два корня. При заданных параметрах

трубки $\frac{R}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cos \alpha = 25 \text{ мм}$, поэтому имеется два корня, соответствующих двум положениям

равновесия. Несложно показать, что меньший корень дает устойчивое положение равновесия, а больший – неустойчивое. Численные значения этих корней равны

$$h = \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 4 \frac{h_0}{R} \sin \alpha}}{2 \frac{\sin \alpha}{R}} \Rightarrow h_1 = 16,5 \text{ мм}, h_2 = 83,5 \text{ мм}$$

Таким образом, при $H < h_2$ вода в трубке установится на уровне h_1 , если начальный уровень превысит h_2 , то далее вода полностью заполнит всю трубку.

3.5 [1,0 балла] Вода полностью заполнит трубку при любом начальном H , если уравнение (12) корней не имеет. Это условие будет выполняться при

$$h_0 > \frac{R}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cos \alpha, \tag{14}$$

или

$$\sin \alpha > \frac{R}{4h_0} = 0,018.$$

4. Вытекание воды (3,0 балла)

4.1 [3,0 балла] Вода начнет вытекать через отверстие только тогда, когда поверхность воды в отверстиях потеряет устойчивость. Это произойдет, если уменьшение потенциальной энергии в поле тяжести земли превысит по модулю увеличение поверхностной энергии. Это условие выражается неравенством

$$2\sigma_0 \pi h^2 < 2 \frac{\pi R^2 h^2}{6} \rho g, \tag{15}$$

из которого следует

$$R > \sqrt{\frac{6\sigma_0}{\rho g}} = 6,6 \text{ мм} \tag{16}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Выделен элемент линии границы	0,5	1,0
	Условие равновесия элемента (2) $(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta l = \sigma_0 \Delta l \cos \theta$	0,5	
2.1	Формула (4) $\Delta U_S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi R \Delta h$	0,5	0,5
2.2	Формула (5) $\Delta U_G = \pi R^2 \Delta h \rho g h$	0,5	0,5
2.3	Равенство измененной энергии (6) $\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi R \Delta h = \pi R^2 \Delta h \rho g h \Rightarrow h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R}$	0,5	1,0
	Формула (7) $h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R}$	0,2	
	Численное значение (правильно округленное) $h_0 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 14 \text{ мм}$	0,3	
3.1	Формула (8) $\Delta U_S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos \alpha}$	0,5	0,5

3.2	Формула (9) $\Delta U_G = \pi r^2 \Delta h \rho g h$	0,5	0,5
3.3	Уравнение (10) $\sigma_0 \cos \theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos \alpha} = \pi r^2 \Delta h \rho g h$	0,5	1,0
	Уравнение (12) $\frac{2\sigma_0 \cos \theta}{\rho g R \left(1 - \frac{h}{R} \operatorname{tg} \alpha\right)} = h \cos \alpha \Rightarrow \frac{h_0}{1 - \frac{h}{R} \operatorname{tg} \alpha} = h \cos \alpha$	0,5	
3.4	Решение уравнения (12)	0,3	1,0
	Анализ устойчивости корней	0,5	
	Правильный результат	0,2	
3.5	Условие отсутствия корней $\sin \alpha > \frac{R}{4h_0}$	0,6	1,0
	Численное значение угла $\sin \alpha > 0,018$	0,4	
4.1	Формулировка основной идеи – изменение потенциальной энергии больше изменения поверхностной	1,5	3,0
	Неравенство (15) $2\sigma_0 \pi h^2 < 2 \frac{\pi R^2 h^2}{6} \rho g$	1,0	
	Численное значение радиуса (правильно округленное) $R > \sqrt{\frac{6\sigma_0}{\rho g}} = 6,6 \text{ мм}$	0,5	
Итого			10,0

Задача 3. Переменный конденсатор (10,0 балла)

1. [0,75 балла] Через достаточно большое время сила тока в цепи станет равной нулю, то есть конденсатор полностью зарядится

$$I = 0. \tag{1}$$

Все напряжение источника будет падать на конденсатор, емкость которого при напряжении $U_0 = 5 \text{ В}$ равна

$$C = 0,10 \text{ мкФ}. \tag{2}$$

Отсюда заряд конденсатора находится по формуле

$$q = C U_0 = 0.50 \text{ мкКл}. \tag{3}$$

2. [0,25 балла] Поскольку ток в цепи конечен, а заряд конденсатора до $U_0 = 10 \text{ В}$ потребует бесконечного заряда, то время зарядки равно.

$$t = \infty. \tag{4}$$

3. [3,0 балла] Пусть конденсатор имеет заряд q и его емкость при этом равна C , тогда для последовательной цепи имеем

$$U_0 = \frac{q}{C} + IR, \tag{5}$$

где сила тока в цепи равна

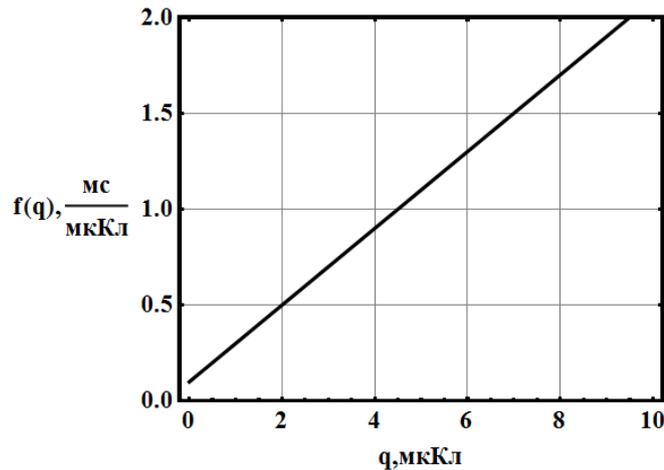
$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), перепишем его в виде

$$dt = \frac{R}{U_0 - \frac{q}{C(q)}} dq = f(q) dq, \tag{7}$$

где $f(q) = R / \left(U_0 - \frac{q}{C(q)} \right)$ – некоторая функция от заряда конденсатора.

Функция $f(q)$ легко строится графически по заданной функции $C = C(U)$ и имеет линейный вид, показанный на рисунке.



Уравнение прямой имеет вид

$$f(q) = a + bq, \tag{8}$$

$$a = 0.10 \frac{\text{мс}}{\text{мкКл}}, \tag{9}$$

$$b = 0.20 \frac{\text{мс}}{(\text{мкКл})^2}. \tag{10}$$

Время, через которое заряд конденсатора станет равным $q = 4$ мкКл, определяется в соответствии с (7) и (8) формулой

$$t = aq + \frac{1}{2}bq^2 = 2.0 \text{ мс} \tag{11}$$

4. **[0,5 балла]** Аналогично определяется время Δt , в течении которого заряд на конденсаторе увеличится с $q_0 = 4$ мкКл до $q = 8$ мкКл

$$t = (q - q_0) \left(a + \frac{1}{2}b(q + q_0) \right) = 5.2 \text{ мс}. \tag{12}$$

5. **[0,5 балла]** Решая обратную задачу, из формулы (11) находим

$$q_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2bt}}{b}. \tag{13}$$

Очевидно, что в начальный момент времени $q(0) = 0$, поэтому в формуле (13) следует выбрать знак плюс, откуда

$$q = \frac{\sqrt{a^2 + 2bt} - a}{b} = 5,0 \text{ мкКл}. \tag{14}$$

6. **[0,5 балла]** В обычном конденсаторе заряд прямо пропорционален напряжению, то есть

$$q = CU, \tag{15}$$

а сила тока в цепи определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt} \sim \frac{dU}{dt}. \tag{16}$$

Так как конденсатор и сопротивление включены последовательно, то сила тока в них одинакова, а колебания напряжения на сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями тока. Подстановка $U \sim \sin \omega t$ дает $I \sim \cos \omega t = \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$, то есть разность фаз колебаний напряжений между конденсатором и сопротивлением составляет $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

В нашей схеме имеется нелинейный конденсатор, однако пропорциональность в формуле (16) сохраняется, так как колебания напряжения малы по сравнению с подаваемым постоянным напряжением, поэтому

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

7. **[4,0 балла]** Приложенное напряжение имеет постоянную и переменную составляющие. Через достаточно большое время постоянная составляющая напряжения будет целиком падать на конденсаторе, то есть

$$U_C = 5,000 \text{ В}, \tag{18}$$

а на сопротивлении постоянная составляющая напряжения будет равна нулю

$$U_R = 0. \tag{19}$$

В нашем случае емкость зависит от напряжения, поэтому (16) переписывается в виде

$$I = \frac{dq}{dt} = C(U) \frac{dU}{dt} + U \frac{dC(U)}{dU} \frac{dU}{dt} = C_{\text{eff}} \frac{dU}{dt}, \quad (20)$$

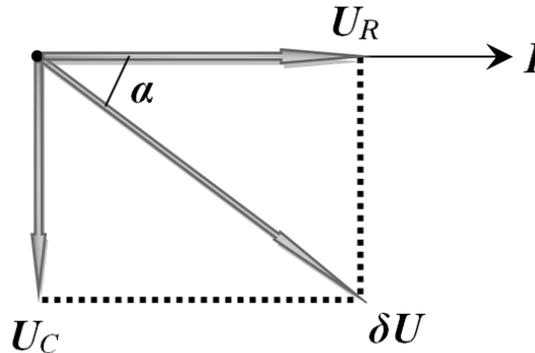
где эффективная емкость конденсатора

$$C_{\text{eff}} = C(U) + U \frac{dC(U)}{dU} = 0.200 \text{ мкФ}. \quad (21)$$

Известно, что сопротивление конденсатора переменному току равно

$$X_C = \frac{1}{\omega C_{\text{eff}}}. \quad (22)$$

Для вычисления силы тока воспользуемся векторной диаграммой, показанной на рисунке для последовательного соединения сопротивления и конденсатора.



Из нее следует, что амплитуда силы тока равна

$$I = \frac{\delta U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{\text{eff}}^2}}} = 44.7 \text{ мкА}. \quad (23)$$

а сдвиг фаз α между током в цепи и напряжением равен

$$\alpha = \arctg\left(\frac{U_C}{U_R}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\omega C_{\text{eff}} R}\right) = 1,11 \text{ рад} = 63,4^\circ. \quad (24)$$

Окончательно, зависимость силы тока от времени имеет вид

$$I(t) = [44,7 \sin(2500t + 1,1)] \text{ мкА}. \quad (25)$$

8. [0,5 балла] Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе находится из векторной диаграммы и равна

$$U_C = \delta U \sin \alpha. \quad (26)$$

Окончательно, с учетом постоянной составляющей напряжения, получаем

$$U_C(t) = U_C + \delta U \sin \alpha \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = [5,000 + 0,089 \sin(2500t - 0,464)] \text{ В}. \quad (27)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Уравнение (1) $I = 0$	0.25	0,75
	Уравнение (2) $C = 0,10 \text{ мкФ}$	0.25	
	Уравнение (3) $q = CU_0 = 0.50 \text{ мкКл}$	0.25	
2	Уравнение (4) $t = \infty$.	0.25	0,25
3	Уравнение (5) $U_0 = \frac{q}{C} + IR$	0.25	3.0
	Уравнение (6) $I = \frac{dq}{dt}$	0.25	
	Уравнение (7) $dt = \frac{R}{U_0 - \frac{q}{C(q)}} dq = f(q) dq$ с функцией $f(q) = R / \left(U_0 - \frac{q}{C(q)}\right)$	0.25	
	Уравнение (8): обнаружено, что $f(q) = a + bq$	1.25	
	Уравнение (9) $a = 0.10 \frac{\text{мС}}{\text{мкКл}}$	0.25	

	Уравнение (10) $b = 0.20 \frac{\text{мс}}{(\text{мкКл})^2}$	0.25	
	Уравнение (11) $t = aq + \frac{1}{2}bq^2$	0.25	
	Численное значение в уравнении (11) $t = 2.0 \text{ мс}$	0.25	
4	Уравнение (12) $t = (q - q_0) \left(a + \frac{1}{2}b(q + q_0) \right)$	0.25	0.5
	Численное значение в уравнении (12)	0.25	
5	Уравнение (14) $q = \frac{\sqrt{a^2 + 2bt} - a}{b}$	0.25	0.5
	Численное значение в уравнении (14)	0.25	
6	Уравнения (15), (16) или эквивалентные им	0.25	0.5
	Уравнение (17) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	0.25	
7	Уравнение (18) $U_C = 5,000 \text{ В}$	0,25	4.0
	Уравнение (20) $I = \frac{dq}{dt} = C(U) \frac{dU}{dt} + U \frac{dC(U)}{dU} \frac{dU}{dt} = C_{\text{eff}} \frac{dU}{dt}$	1,5	
	Уравнение (21): правильное значение $C_{\text{eff}} = 0.200 \text{ мкФ}$	0.25	
	Уравнение (22) $X_C = \frac{1}{\omega C_{\text{eff}}}$	0,25	
	Правильная векторная диаграмма или импедансы	0,5	
	Уравнение (23) $I = \frac{\delta U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{\text{eff}}^2}}}$	0,25	
	Уравнение (23): правильное числовое значение $I = 44.7 \text{ мкА}$	0,25	
	Уравнение (24) $\alpha = \text{arctg} \left(\frac{1}{\omega C_{\text{eff}} R} \right)$	0,25	
	Уравнение (24): правильное числовое значение $\alpha = 1,11 \text{ рад} = 63,4^\circ$	0,25	
	Уравнение (25) $I(t) = [44,7 \sin(2500t + 1,1)] \text{ мкА}$	0,25	
8	Уравнение (26) $U_C = \delta U \sin \alpha$	0.25	0.5
	Уравнение (27) $U_C(t) = [5,000 + 0,089 \sin(2500t - 0,464)] \text{ В}$	0.25	
Итого			10,0