

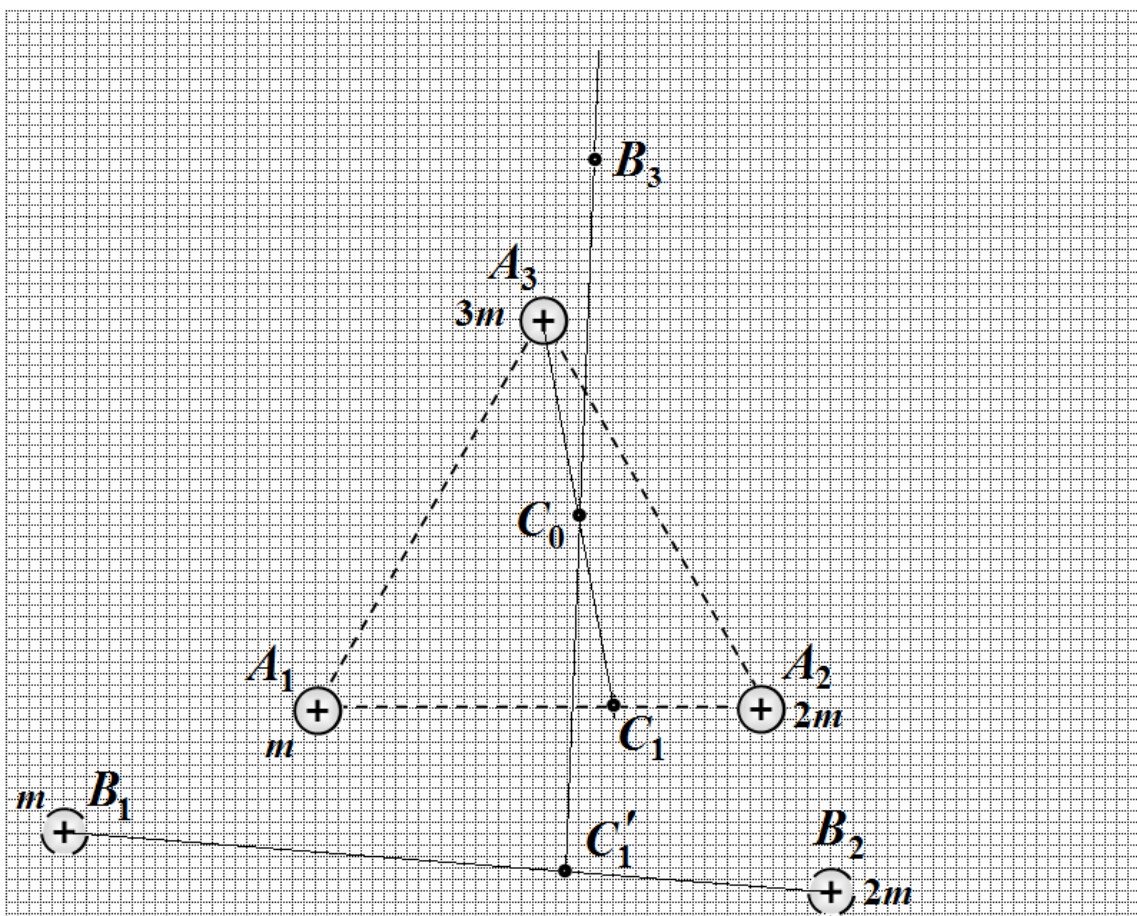
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1

Задача 1.1

Основная идея – центр масс остается на месте! Сначала находим положения центра масс в начальном положении: Делим отрезок A_1A_2 в отношении 2:1 (точка C_1); соединяем с точкой A_3 и отрезок C_1A_3 делим пополам (точка C_0) это и будет центр масс системы. Нахождения положения третьего шарика осуществляем следующим образом: отрезок B_1B_2 делим в отношении 2:1 (точка C'_1) проводим прямую от этой точки через центр масс C_0 и на ней откладываем отрезок C_0B_3 , длина которого равна длине отрезка C'_1C_0 — точка B_3 — положение третьего шарика!

Схема оценивания



1	Сформулирована основная идея — постоянство центра масс	1,0
2	Найдено положение центра масс - в круге 1; - в круге 2; - в круге 3;	0,5 (0,3) (0,2)
3	Найдено положение третьего шарика: - в круге 1; - в круге 2; - в круге 3;	0,5 (0,3) (0,2)

Задача 1.2

Построенные прямые – изотермы, так как их коэффициент наклона равен -1. Следовательно, их уравнения имеют вид

$$PV = const . \tag{1}$$

Чтобы получить цикл с максимальным КПД необходимо построить две адиабаты через крайние точки. Так как уравнение адиабаты имеет вид

$$PV^\gamma = const . \tag{2}$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1,4$ - показатель адиабаты двухатомного газа, то в логарифмическом масштабе это уравнение имеет вид

$$\log_2 P = const - 1,4 \log_2 V \tag{3}$$

Графиками этих функций являются прямые с коэффициентом -1,4. Постоянная величина в уравнении (1) пропорциональна абсолютной температуре. Из приведенного графика следует, что максимальная температура в 2 раза больше минимальной, поэтому КПД этого цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 50\% \tag{4}$$

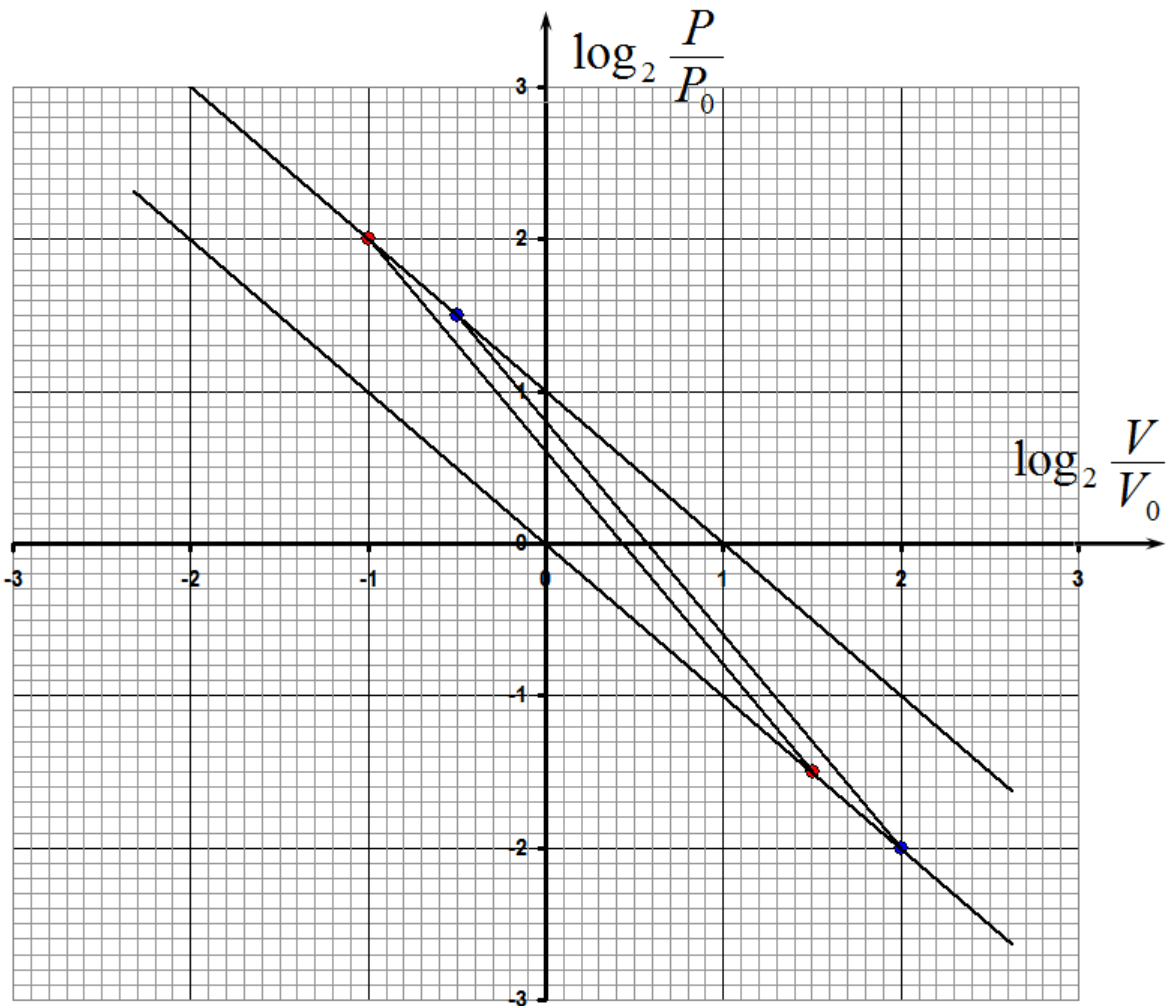


Схема оценивания

1	Указано, что прямые изотермы	0,5
2	Выбран цикл Карно	0,2
3	Приведено уравнение адиабаты	0,2
	В т.ч. в логарифмическом масштабе	0,2
4	Правильно построены прямые	0,6
5	Найден КПД	0,3

Задача 1.3

1. проводим прямую SS' до пересечения с оптической осью – это будет центр линзы C .
2. определение фокусов: проводим через точку-источник прямую параллельную главной оптической оси, затем через точку пересечения луча с плоскостью линзы проводим прямую через точку-изображение до пересечения с главной оптической осью – это задний фокус линзы. Аналогично находим передний фокус. После определения фокусов построение изображения второго источника проводится традиционным способом.

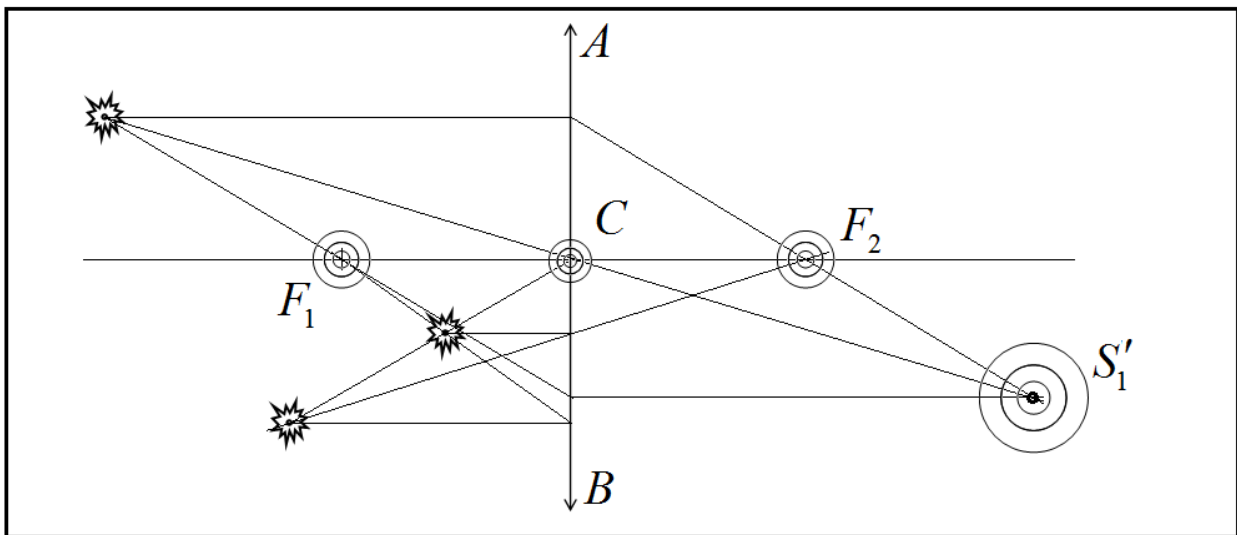


Схема оценивания.

1	Найден оптический центр линзы	0,5
	- в круге 1;	(0,3)
	- в круге 2;	(0,2)
2	Найдены фокусы линзы	1,0
	- в круге 1;	(0,6)
	- в круге 2;	(0,4)
3	Построено изображение второго источника	1,5
	- в круге 1;	(1,0)
	- в круге 2;	(0,5)

Задача 2. Сосуд с водой (10 баллов)

1. При налипании воды воздух в сосуде будет сжиматься, а его давление возрастет. В тот момент, когда трубка будет полностью заполнена водой давление воздуха в сосуде будет равно

$$p = p_0 + \rho g(L - x_0). \quad (1)$$

Так как стенки сосуда хорошо проводят тепло, то температура воздуха внутри сосуда не изменится, поэтому будут справедливы уравнения состояния

$$p_0 S h = \nu R T_0, \quad (2)$$

$$p S (h - x_0) = \nu R T_0, \quad (3)$$

где S – площадь поперечного сечения сосуда, ν – количество молей воздуха внутри сосуда.

Из выражений (1)-(3) получаем следующее квадратное уравнение

$$\rho g x_0^2 - [p_0 + \rho g(L + h)]x_0 + \rho g h L = 0, \quad (4)$$

которое имеет решение

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{\rho g} + L + h \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + L + h \right)^2 - 4hL} \right]. \quad (5)$$

Из двух решений (5) выбираем меньшее, так как должно быть $x_0 = h$ при $p_0 = 0$ или $x_0 = 0$ при $L = 0$, то есть

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{\rho g} + L + h - \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + L + h \right)^2 - 4hL} \right]. \quad (6)$$

Подстановка численных значений дает

$$x_0 = 7,86 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (7)$$

2. Из уравнения равновесия воды в сосуде следует, что давление воздуха внутри сосуда в зависимости от x равняется

$$p(x) = p_0 + \rho g(L - x). \quad (8)$$

3. Уравнение состояния идеального газа для произвольного x дается выражением

$$p(x) S (h - x) = \nu R T(x), \quad (9)$$

которое совместно с (1) дает

$$T(x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{h} \right) \left(1 + \frac{\rho g(L-x)}{p_0} \right). \quad (10)$$

4. Температура воздуха, при которой он вытесняет жидкость из сосуда, определяется условием $x = 0$, что согласно (10) приводит к

$$T_m = T_0 \left(1 + \frac{\rho g L}{p_0} \right), \quad (11)$$

а соответствующее численное значение

$$T_m = 350 \text{ К}. \quad (12)$$

5. Изменение внутренней энергии воздуха равно

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R (T - T_0) = \frac{5}{2} \rho g L S h, \quad (13)$$

а работа, совершаемая воздухом по вытеснению воды, вычисляется как

$$A = \int_0^{x_0} p(x) S dx = \frac{1}{2} p_0 S L \left(1 + \frac{p_0}{2\rho g L} + \frac{\rho g L}{2p_0} \left[1 + \frac{2h}{L} - \frac{h^2}{L^2} \right] \right) - \frac{1}{4} p_0 S L \left(1 + \frac{\rho g(L-h)}{p_0} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{h}{L} + \frac{p_0}{\rho g L} \right)^2 - \frac{4h}{L}}. \quad (14)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, сообщенное воздуху, равно

$$Q = \Delta U + A, \quad (15)$$

откуда с учетом (13) и (14) находим

$$Q = \frac{1}{2} p_0 S L \left(1 + \frac{p_0}{2\rho g L} + \frac{\rho g L}{2p_0} \left[1 + \frac{12h}{L} - \frac{h^2}{L^2} \right] \right) - \frac{1}{4} p_0 S L \left(1 + \frac{\rho g(L-h)}{p_0} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{h}{L} + \frac{p_0}{\rho g L} \right)^2 - \frac{4h}{L}}. \quad (16)$$

Подстановка численных значений дает

$$Q = 17,0 \text{ кДж}. \quad (17)$$

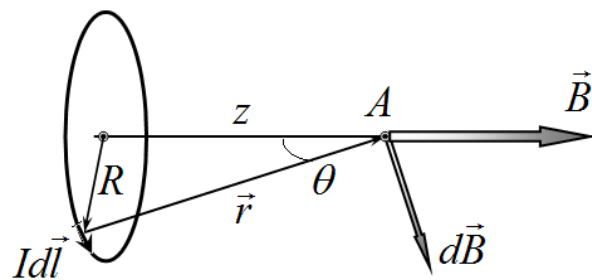
Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Формула (1) $p = p_0 + \rho g(L - x_0)$	0,25	2,0
	Формула (2) $p_0 Sh = \nu RT_0$	0,25	
	Формула (3) $pS(h - x_0) = \nu RT_0$	0,25	
	Формула (4) $\rho g x_0^2 - [p_0 + \rho g(L + h)]x_0 + \rho ghL = 0$	0,25	
	Формула (5) $x_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{\rho g} + L + h \pm \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + L + h \right)^2 - 4hL} \right]$	0,25	
	Формула (6) $x_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{\rho g} + L + h - \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + L + h \right)^2 - 4hL} \right]$	0,5	
	Формула (7) $x_0 = 7,86 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	0,25	
2	Формула (8) $p(x) = p_0 + \rho g(L - x)$	0,5	0,5
3	Формула (9) $p(x)S(h - x) = \nu RT(x)$	0,5	1,0
	Формула (10) $T(x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{h} \right) \left(1 + \frac{\rho g(L-x)}{p_0} \right)$	0,5	
4	Формула (11) $T_m = T_0 \left(1 + \frac{\rho gL}{p_0} \right)$	0,5	1,0
	Формула (12) $T_m = 350 \text{ К}$	0,5	
5	Формула (13) $\Delta U = \frac{5}{2} \nu R(T - T_0) = \frac{5}{2} \rho gLSh$	0,5	2,5
	Формула (14) $A = \frac{1}{2} p_0 SL \left(1 + \frac{p_0}{2\rho gL} + \frac{\rho gL}{2p_0} \left[1 + \frac{2h}{L} - \frac{h^2}{L^2} \right] \right) - \frac{1}{4} p_0 SL \left(1 + \frac{\rho g(L-h)}{p_0} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{h}{L} + \frac{p_0}{\rho gL} \right)^2 - \frac{4h}{L}}$	0,5	
	Формула (15) $Q = \Delta U + A$	0,5	
	Формула (16) $Q = \frac{1}{2} p_0 SL \left(1 + \frac{p_0}{2\rho gL} + \frac{\rho gL}{2p_0} \left[1 + \frac{12h}{L} - \frac{h^2}{L^2} \right] \right) - \frac{1}{4} p_0 SL \left(1 + \frac{\rho g(L-h)}{p_0} \right) \sqrt{\left(1 + \frac{h}{L} + \frac{p_0}{\rho gL} \right)^2 - \frac{4h}{L}}$	0,5	
	Формула (17) $Q = 17,0 \text{ кДж}$	0,5	
Итого			7,0

Задача 3 Запаздывание и затухание (16 баллов)

1.1.1 Проще найти индукцию магнитного поля кольца, используя закон Био—Савара и принцип суперпозиции. Проекция на ось z вектора индукции магнитного поля, создаваемого произвольным выделенным элементом кольца $Id\vec{l}$ равна

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta \quad (1)$$



Выражая геометрические параметры, получим

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdlR}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdlR}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Суммирование по всем элементам кольца проводится элементарно, в итоге получаем

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR \cdot 2\pi R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I \cdot \pi R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

При $z \gg R$ получаем

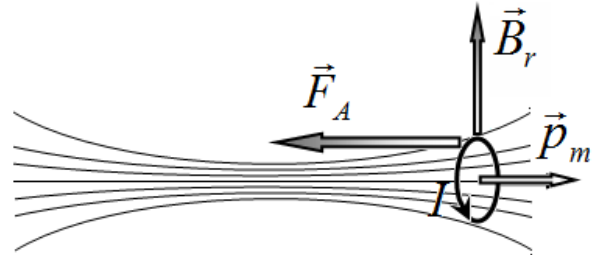
$$dB_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{z^3}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$b = \frac{\mu_0}{2\pi} \quad (5)$$

$$\beta = 3$$

1.1.2 Очевидно, что результирующая сила Ампера F_A обусловлена радиальной составляющей вектора индукции магнитного поля \vec{B}_r . Эта компонента на небольшом расстоянии от оси может быть выражена через осевую компоненту поля с помощью теоремы о магнитном потоке.



Выберем поверхность в форме тонкого цилиндра, ось которого совпадает с осью поля, запишем выражение для магнитного потока через его поверхность и приравняем его к нулю

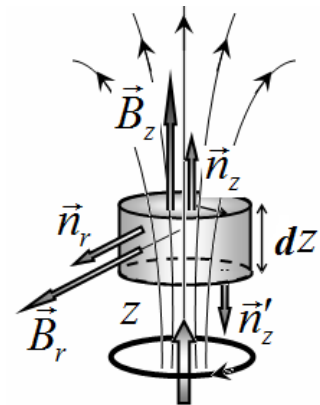
$$B_z(z + dz) \cdot \pi r^2 - B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r dz = 0 \quad (6)$$

Из этого уравнения находим

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \quad (7)$$

Используя закон Ампера, запишем уравнение для силы, действующей на кольцо

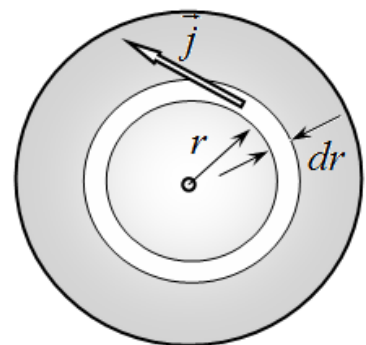
$$F = IB_r 2\pi r = -I \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} 2\pi r = -p_m \frac{dB_z}{dz}. \quad (8)$$



1.2.1 Частота колебаний определяется известной формулой для частоты колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (9)$$

1.2.2 Механизм воздействия диска на магнит следующий: при смещении магнита в области диска индуцируется вихревое электрическое поле, которое приводит к появлению токов Фуко. Магнитное поле этих токов и воздействует на магнит. Для расчета магнитного поля, создаваемого токами Фуко в диске, следует учесть, что размеры диска малы по сравнению с расстоянием до магнита, поэтому диск также можно считать магнитным диполем. Поэтому достаточно найти индуцированный магнитный момент диска, а затем воспользоваться формулой (4) для расчета индукции поля.



Выделим на диске тонкое кольцо радиуса r и толщиной dr . Напряженность вихревого электрического поля в пределах этого кольца находим по закону электромагнитной индукции Фарадея:

$$2\pi rE = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \Rightarrow E = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt}. \quad (10)$$

Здесь предполагается, что в пределах всего диска можно пренебречь изменением осевой составляющей магнитного поля, создаваемого магнитом, которая также определяется формулой (4). Так если координата магнита равна x , то в области диска

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{(z-x)^3}. \quad (11)$$

Подставляя это выражение в формулу (10) и вычисля производную, получим

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{(z-x)^4} \frac{dx}{dt} \approx -\frac{3\mu_0}{4\pi} r \frac{P_m}{z^4} v \quad (12)$$

В этом выражении учтено, что $x \ll z$.

Плотность тока в выделенном кольце находим по закону Ома

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (13)$$

Так как сила тока в кольце равна $dI = jh dr$, то магнитный момент кольца оказывается равным

$$dp'_m = \pi r^2 dI = \pi r^2 j dr \cdot h = -\pi r^2 dr \cdot h \frac{3\mu_0}{4\pi\rho} r \frac{P_m}{z^4} v = -\frac{3\mu_0}{4\rho} \frac{P_m}{z^4} h v r^3 dr. \quad (14)$$

Интегрируя по всему диску, получим его суммарный магнитный момент:

$$p'_m = -\frac{3\mu_0}{4\rho} \frac{P_m}{z^4} h v \int_0^R r^3 dr = -\frac{3\mu_0}{16\rho} \frac{P_m}{z^4} h R^4 v \quad (15)$$

Для вычисления силы, действующей на магнит, воспользуемся формулой (8), в которой величина индукции рассчитывается по формуле (4). Указанные подстановки приводят к выражению

$$F = -p'_m \frac{dB_z}{dz} = -p'_m \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P'_m}{z^3} \right) = \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{P_m P'_m}{z^4} = -\frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{P_m}{z^4} \frac{3\mu_0}{16\rho} \frac{P_m}{z^4} h R^4 v = -\frac{9}{32} \frac{\mu_0^2 P_m^2}{\pi \rho z^8} h R^4 v. \quad (16)$$

Уравнение движения магнита с учетом влияния диска имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - bx' \quad (17)$$

где $b = \frac{9}{32} \frac{\mu_0^2 P_m^2}{\pi \rho z^8} h R^4$ — коэффициент в формуле (16).

1.2.3 Используя приведенное в условии решение уравнения затухающих колебаний, получим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{2\omega_0^2} \right) \quad (18)$$

где $\beta = b/2m$. Из этого выражения находим относительный сдвиг частоты

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\beta^2}{2\omega_0^2} = -\frac{1}{2km} \left(\frac{9}{64} \frac{\mu_0^2 P_m^2}{\pi \rho z^8} h R^4 \right)^2$$

1.2.4 Характерное время затухания равно

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{b} = \frac{64m\pi\rho z^8}{9\mu_0^2 P_m^2 h R^4}$$

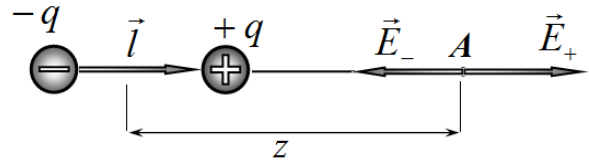
1.2.5 Мгновенная мощность тепловых потерь в диске

$$P = \int \rho j^2 dV = \int_0^R \rho \left(\frac{3\mu_0 P_m v}{4\pi z^8 \rho} r \right)^2 h 2\pi r dr = \frac{9h\mu_0^2 P_m^2 R^4}{32\pi z^8 \rho} v^2$$

получается равной произведению силы (16) на скорость магнита.

Часть 2 Электрическая

2.1.1 Напряженность электрического поля диполя рассчитывается по принципу суперпозиции



$$E = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(z - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\left(z + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q \cdot 2zl}{4\pi\epsilon_0\left(z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{z p_e}{2\pi\epsilon_0\left(z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^2} \quad (19)$$

При больших $z \gg l$ получаем

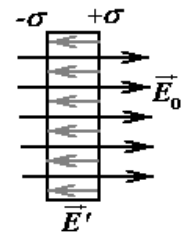
$$E = \frac{z p_e}{2\pi\epsilon_0\left(z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{z^3} \quad (20)$$

Таким образом,

$$a = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}, \quad \alpha = 3 \quad (21)$$

2.2.1 Получим выражение для силы, действующей на шарик со стороны диска.

Электрическое поле внутри проводящего диска должно отсутствовать. Под действием поля \vec{E}_0 точечного заряда q на поверхности диска будут индуцироваться заряды с поверхностной плотностью $\pm\sigma$, которые будут создавать поле \vec{E}' , равное по величине и противоположное по направлению поля точечного заряда. Учитывая, что размеры диска малы по сравнению с расстоянием до заряда, можно пренебречь изменением вектора напряженности \vec{E}_0 в пределах диска. Поэтому и поле \vec{E}' следует считать однородным, а поверхностную плотность индуцированных зарядов постоянной.



Напряженность поля точечного заряда определяется формулой $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, а напряженность поля индуцированных зарядов связана с их поверхностной плотностью соотношением $E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Приравнявая эти величины, определим поверхностную плотность

индуцированных зарядов $\sigma' = \frac{q}{4\pi z^2}$, и величину индуцированного заряда на одной стороне

диска $q' = \sigma' S = \frac{qS}{4\pi z^2}$, (где $S = \pi R^2$ - площадь диска). Индуцированный дипольный момент диска равен

$$p'_e = q'h = \frac{qSh}{4\pi z^2} = \frac{q}{4\pi z^2} V. \quad (22)$$

Следовательно, сила, действующая на шарик равна

$$F = qE = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p'_e}{z^3} = \frac{q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 z^5} V \quad (23)$$

При смещении шарика в этой формуле следует заменить z на $(z-x)$. Учитывая, что $x \ll z$ упростим полученное выражение для силы

$$F = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 (z-x)^5} = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-5} \approx \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5} + 5 \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^6} x \quad (24)$$

Уравнение движения шарика в этом случае приобретает вид

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5} + 5 \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^6} x \quad (25)$$

Первое дополнительное слагаемое определяет смещение положения равновесия, которое в рамках сделанных приближений равно

$$k\Delta x = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5} \Rightarrow \Delta x = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5 k} \quad (26)$$

2.2.2 Второе слагаемое в уравнении (24) определяет сдвиг частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^6 m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^6 m}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{5q^2 V}{16\pi^2 \varepsilon_0 z^6 k}\right) \quad (27)$$

Отсюда следует, что относительный сдвиг частоты равен

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{5q^2 V}{16\pi^2 \varepsilon_0 z^6 k} \quad (28)$$

2.2.3 Поверхностная плотность заряда σ на поверхностях диска меняется из-за тока в диске, который определяется напряжённостью электрического поля в диске ($\dot{\sigma} = j = E/\rho$). Поле в диске складывается из поля шарика

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(z-x)^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right)$$

и направленного в противоположную сторону поля зарядов диска

$$E_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Записав закон Ома $E_1 + E_2 = \rho j$ в виде

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \rho j$$

с учётом равенств $\dot{\sigma} = j$ и $p = \sigma Sh = \sigma V$ ($V = \pi R^2 h$) получим требуемое уравнение

$$\varepsilon_0 \rho \dot{p} + p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right)$$

$$2.2.4 \quad R = \rho \frac{h}{S}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}, \quad \tau = RC = \varepsilon_0 \rho$$

$$2.2.5 \quad \frac{2\pi}{\omega} \gg \varepsilon_0 \rho \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 \rho \omega \ll 1.$$

2.2.6 При гармонических колебаниях отношение амплитуды $\varepsilon_0 \rho \dot{p}$ к амплитуде p равно $\varepsilon_0 \rho \omega$, т.е. очень мало. Поэтому в нулевом приближении в уравнении

$$\varepsilon_0 \rho \dot{p} + p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right)$$

первым членом можно пренебречь. Тогда

$$p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) \quad \text{и} \quad \dot{p} = \frac{qV}{2\pi z^3} v$$

Следующее приближение получим, подставив \dot{p} в исходное уравнение

$$p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) - \varepsilon_0 \rho \dot{p} = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) - \varepsilon_0 \rho \frac{qV}{2\pi z^3} v$$

(Возможно решение с помощью векторной диаграммы.)

2.2.7 Сила, действующая на шарик со стороны диска равна

$$F = \frac{p}{2\pi\epsilon_0(z-x)^3} q = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z^3} \left(1 + 3\frac{x}{z}\right) \left[\frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) - \epsilon_0 \rho \frac{qV}{2\pi z^3} v\right] =$$

$$= \frac{q^2 R^2 h}{8\pi\epsilon_0 z^6} [(z + 5x) - 2\epsilon_0 \rho v]$$

Уравнение движения шарика

$$mx'' = -kx + \frac{q^2 R^2 h}{8\pi\epsilon_0 z^6} [(z + 5x) - 2\epsilon_0 \rho v]$$

или

$$mx'' + \frac{q^2 \rho R^2 h}{4\pi z^6} x' + \left[k - \frac{5q^2 R^2 h}{8\pi\epsilon_0 z^6}\right] x = \frac{q^2 R^2 h}{8\pi\epsilon_0 z^5}$$

2.2.8

$$b = \frac{q^2 \rho R^2 h}{4\pi z^6}, \quad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{q^2 \rho R^2 h}{8\pi z^6 m}, \quad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{8\pi z^6 m}{q^2 \rho R^2 h}.$$

2.2.9 Мгновенная тепловая мощность в диске равна

$$P = j^2 \rho V = \left(\frac{qv}{2\pi z^3}\right)^2 \rho V = \frac{q^2 \rho R^2 h}{4\pi z^6} v^2 = bv^2$$

что опять равно мощности силы сопротивления ($F = -bv$).

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1.1.1	Найдено поле кольца на оси	0,25	1
	Сделано упрощение $z \gg R$	0,25	
	Правильное b	0,25	
	Правильное β	0,25	
1.1.2	Записана связь B_r и B_z	0,25	1
	Найдена радиальная составляющая $B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$ (знак важен)	0,5	
	потерян минус	0,2	
	$F = -p_m \frac{dB_z}{dz}$ (потеря знака не штрафуются)	0,25	
1.2.1	$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	0,25	0,25
1.2.2	$E = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dt}$ (знак важен)	0,75	2
	потерян минус	0,25	
	Закон Ома в дифференциальной форме $j = E / \rho$	0,25	
	Магнитный момент $p'_m = \frac{3\mu_0}{16\rho} \frac{p_m}{z^4} hR^4 v$	0,4	
	Сила $F = -\frac{9}{32} \frac{\mu_0^2 p_m^2}{\pi \rho z^8} hR^4 v = bv$	0,4	
	потерян минус	0,1	
	Вместо 9/32 получено 21/32	0,2	
$ma = -kx - bv$	0,2		
1.2.3	Частота меняется из-за затухания	0,3	1
	$\Delta\omega = \delta^2 / 2\omega_0$	0,3	
	$\delta = b / 2m$	0,2	
	Ответ	0,2	

1.2.4	$\tau = \frac{64\pi\rho z^8}{9\mu_0^2 p_m^2 h R^4}$	0,25	0,25
1.2.5	Найдены потери в диске	0,5	1
	Найдена работа силы трения	0,4	
	Они равны	0,1	
2.1.1	Найдено поле диполя на оси	0,25	1
	Сделано упрощение $z \gg R$	0,25	
	Правильное a	0,25	
	Правильное a	0,25	
2.2.1	Найдена постоянная компонента силы $\frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5}$	0,5	0,75
	$\Delta x = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^5 k}$	0,25	
2.2.2	Найдена компонента силы $\frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z^6} x$	0,5	0,75
	$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{5q^2 V}{16\pi^2 \varepsilon_0 z^6 k}$	0,25	
2.2.3	$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(z-x)^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right)$	0,3	1,5
	$E_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	0,2	
	потерян минус	0,1	
	$E_1 + E_2 = \rho j$	0,2	
	$\dot{\sigma} = j$	0,2	
	$p = \sigma V$	0,2	
	$\varepsilon_0 \rho \dot{p} + p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right)$	0,4	
2.2.4	$\tau = \varepsilon_0 \rho$		0,25
2.2.5	$\varepsilon_0 \rho \omega \ll 1$		0,5
2.2.6	$\varepsilon_0 \rho \dot{p} \ll p$	0,5	2
	$\dot{p} = \frac{qV}{2\pi z^3} v$	1	
	$p = \frac{qV}{4\pi z^2} \left(1 + 2\frac{x}{z}\right) - \varepsilon_0 \rho \frac{qV}{2\pi z^3} v$	0,5	
2.2.7	$F = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3} q$	0,5	1,5
	$F = \frac{q^2 R^2 h}{8\pi\varepsilon_0 z^6} [(z + 5x) - 2\varepsilon_0 \rho v]$	0,5	
	$m x'' + \frac{q^2 \rho R^2 h}{4\pi z^6} x' + \left[k - \frac{5q^2 R^2 h}{8\pi\varepsilon_0 z^6} \right] x = \frac{q^2 R^2 h}{8\pi\varepsilon_0 z^5}$	0,5	
2.2.8	$\tau = \frac{8\pi z^6 m}{q^2 \rho R^2 h}$		0,25
2.2.9	Найдены потери в диске	0,5	1
	Найдена работа силы трения	0,4	
	Они равны	0,1	
Итого			16