1. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или голубой цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

Решение. Если каждые две соседние точки (то есть точки на расстоянии 1) разного цвета, то получается одноцветная решётка из квадратов $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, в которой легко найти треугольник любой натуральной площади.

Если это не так, рассмотрим две соседние точки A и B ($AB = 1$) одного цвета (скажем, белого). Чтобы найти треугольник площади n, нам нужна белая точка на прямой, проходящей параллельно AB на расстоянии $2n$. Если такая точка найдётся для каждого n, утверждение доказано. В противном случае существует прямая ℓ, целиком заполненная голубыми точками.

Рассмотрим прямую ℓ_1, "соседнюю с ℓ", то есть проходящую параллельно ℓ на расстоянии 1 от неё. Если на ней есть голубая точка, то имеется треугольник с голубыми вершинами площади $\frac{n}{2}$ для каждого натурального n.

Единственный оставшийся случай – когда прямая ℓ_1 содержит только белые точки. Тогда мы рассмотрим прямую $\ell_2 \neq \ell$ на расстоянии 1 от ℓ_1, и, как и выше, если на ней есть белая точка, утверждение доказано. А если все точки ℓ_2 голубые, то для каждого натурального n найдётся треугольник площади n с тремя голубыми вершинами.

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Точка K симметрична M относительно AC. Прямая BK пересекает AC в точке P. Докажите, что если $\angle AMP = \angle CMN$, то $\angle ABP = \angle CBN$.

Решение. Пусть D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из A на BP, MP и BM соответственно, а G, Q и H – основания перпендикуляров, опущенных из C на BP, MP и BM соответственно.

Заметим, что $\triangle AFM \sim \triangle CQM$ и $\triangle AME \sim \triangle CMH$, следовательно, $\frac{AF}{CQ} = \frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CH}$. В силу симметрии $CQ = CG$, $AE = AD$ и $\angle FAD = \angle FBD = \angle GCH$, поэтому $\frac{AF}{CG} = \frac{AD}{CH}$. Отсюда следует, что $\triangle FAD \sim \triangle GCH$, таким образом, $\angle AFD = \angle CGH$.

Далее, точки A, B, F, D лежат на одной окружности, поэтому $\angle ABP = \angle AFD$, и аналогично $\angle CBN = \angle CGH$. Сопоставляя это равенство с результатом предыдущего абзаца, получаем $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^3+y^3+xy)=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy)$$

при всех $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. В данное уравнение

$$f(x^3+y^3+xy)=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy) \qquad (1)$$

подставим $x=1$, $y=0$ и получим $f(0)=0$.

Возьмем в (1) $y=0$, будем иметь

$$f(x^3)=x^2f(x). \qquad (2)$$

Подстановка в (1) $y=-x$ дает

$$f(-x^2)=x^2f(x)+x^2f(-x)+f(-x^2)\Rightarrow f(-x)=-f(x). \qquad (3)$$

Из (1) и (3) имеем

$$\begin{aligned}&f(x^3+y^3+xy)+f(x^3-y^3-xy)\\&\quad=x^2f(x)+y^2f(y)+f(xy)+x^2f(x)-y^2f(y)-f(xy)=2x^2f(x)=2f(x^3).\end{aligned} \qquad (4)$$

Заметим, что для любых a, $b\in\mathbb{R}$ найдутся x, $y\in\mathbb{R}$ такие, что

$$a=x^3+y^3+xy,\quad b=x^3-y^3-xy.$$

Для этого достаточно взять x, y из равенств

$$x^3=\frac{a+b}{2},\quad y^3+xy=\frac{a-b}{2}$$

(тут левые части – функции, принимающие все действительные значения). Таким образом, (4) можно записать в виде

$$f(a)+f(b)=2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),\quad a,\ b\in\mathbb{R}.$$

Отсюда также имеем

$$f(0)+f(a+b)=2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Rightarrow f(a+b)=f(a)+f(b),\quad a,\ b\in\mathbb{R}.$$

Тепер сделаем в (2) замену $x\to x+1$, обозначение $c=f(1)$, доказанную нами аддитивность f, и получим

$$\begin{aligned}f((x+1)^3)&=(x+1)^2f(x+1)\\\Leftrightarrow f(x^3)+3f(x^2)+3f(x)+c&=(x^2+2x+1)(f(x)+c)\\\Leftrightarrow 3f(x^2)&=(2x-2)f(x)+(x^2+2x)c\end{aligned} \qquad (5)$$

Заменив в (5) $x\to -x$, получим

$$3f(x^2)=(-2x-2)f(-x)+(x^2-2x)c=(2x+2)f(x)+(x^2-2x)c \qquad (6)$$

Приравнивая правые части (5) и (6), получим

$$f(x)=cx.$$

Проверка подтверждает, что при всех $c\in\mathbb{R}$ такая функция будет удовлетворять условию задачи.

Ответ: $f(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$.