№1. Докажите, что при некотором натуральном n остаток от деления 3^n на 2^n больше 10^{2021}.

Первое решение. Выберем натуральное M, для которого $2^M > 10^{2022}$, и рассмотрим остаток r при делении 3^M на 2^M:

$$3^M \equiv r \pmod{2^M},\ 0 < r < 2^M.$$

Если $r > 10^{2021}$, число M – искомое. В противном случае выберем наименьшее k, для которого $3^k r > > 10^{2021}$. При этом $3^k r < 10^{2022} < 2^M$. Поскольку $3^{k+M} \equiv 3^k r \pmod{2^M}$, остаток от деления 3^{k+M} на 2^{k+M} имеет вид $3^k r + 2^M s$ для некоторого целого неотрицательного s, следовательно, больше 10^{2021}.

Второе решение. Выберем любое натуральное k, для которого $2^{k+2} > 10^{2021}$. Найдём $v_2(3^{2^k}-1)$, то есть наибольшее m, для которого $3^{2^k}-1$ делится на 2^m. Согласно известной лемме об уточнении показателя,

$$v_2(3^{2^k}-1) = v_2(3^2-1) + k - 1 = k + 2.$$

Тогда число $n = 2^k$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, если r – остаток при делении 3^n на 2^n, то $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{2^k}}$ и, следовательно, $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{k+3}}$ (мы пользуемся тем, что $2^k \geq k+3$). Так как $r-1$ делится на 2^{k+2} и не делится на 2^{k+3}, $r \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$, поэтому $r \geq 1 + 2^{k+2} > > 10^{2021}$.

Третье решение. Выберем натуральное k, для которого $3^k > 10^{2021}$, и натуральное m, для которого $2^m > 3^k$. Существует T, для которого $3^T \equiv 1 \pmod{2^m}$ (например, можно взять $T = 2^{m-2}$). Тогда при всех натуральных s

$$3^{k+sT} \equiv 3^k \pmod{2^m},$$

то есть 3^{k+sT} даёт остаток 3^k при делени на 2^m и, следовательно, остаток, не меньший $3^k > 10^{2021}$ при делении на любую более высокую степень 2. Теперь можно взять $n = k + sT$ такое, что $k + sT > m$.

№2. Дан выпуклый вписанный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $BC = EF$ и $CD = AF$. Диагонали AC и BF пересекаются в точке Q, а диагонали EC и DF — в точке P. На отрезках DF и BF отмечены точки R и S соответственно так, что $FR = PD$ и $BQ = FS$. **Отрезки** RQ и PS пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TC делит диагональ DB пополам.

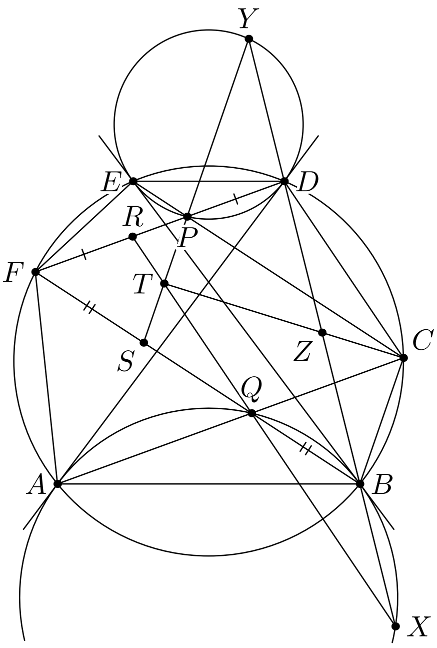
Первое решение. Из условия задачи очевидно следуют параллельности $BF \parallel CE$ и $AC \parallel DF$. Обозначим описанные окружности $\triangle ABQ$ и $\triangle DEP$ через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что прямые AD и BE являются общими внутренними касательными к ω_1 и ω_2. Действительно, $\angle BAQ = \angle BEC = \angle EBQ$, то есть прямая EB касается ω_1. Остальные касания устанавливаются аналогично. Заметим, что четырехугольник $CPFQ$ является параллелограммом. Тогда $CQ = FP = RD$, то есть и четырехугольник $CQRD$ — параллелограмм (также, как и четырехугольник $CPSB$). Прямые BC и DC не параллельны прямой BD. Поэтому RQ и PS пересекают прямую BD (обозначим эти точки пересечения через X и Y соответственно). Тогда точка X лежит на ω_1, так как $\angle QAB = \angle CDB = \angle BXQ$. Аналогично, Y лежит на ω_2. Следовательно,

$$DB \cdot DX = DA^2 = BE^2 = BD \cdot BY,$$

откуда $DX = BY$ или же $BX = DY$. Пусть TC и BD пересекаются в точке Z. Тогда из параллельностей $TX \parallel CD$ и $TY \parallel BC$ следует

$$\frac{DZ}{DX} = \frac{CZ}{CT} = \frac{BZ}{BY},$$

что немедленно дает равенство отрезков DZ и BZ.



Замечание. Равенство $BX = DY$ также можно получить из теоремы Менелая (применив два раза) для $\triangle BDF$ и секущих $R - Q - X$ и $S - P - Y$.

Второе решение. Так же, как и в первом решении, запишем параллельности $BF \parallel CE$ и $AC \parallel DF$, и отметим параллелограммы $CPFQ$, $CQRD$ и $CPSB$.

Отметим на отрезке CQ точку N, а на отрезке RN точку M такие, что $FRNQ$ и $FRMS$ — параллелограммы. Тогда $SM = FR = PD$ и $SM \parallel PD$, то есть $SMDP$ — также параллелограмм, откуда $DM = PS = CB$ и $DM \parallel CB$, то есть и $DMBC$ — параллелограмм, а в нем CM делит BD пополам. Для решения задачи осталось доказать, что точки T, M и C лежат на одной прямой.

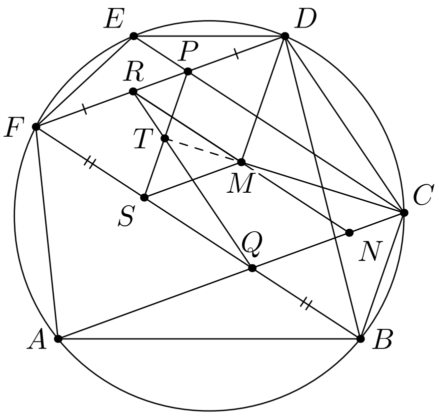
Применяя теорему Менелая к $\triangle FRQ$ и секущей $P - T - S$, из доказанных выше параллельностей получаем:

$$1 = \frac{FP}{PR} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{QS}{SF} = \frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR},$$

то есть

$$\frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR} = 1. \tag{1}$$

Коллинеарность точек T, M и C немедленно следует из (1) по обратной теореме Менелая для $\triangle QNR$.



№3. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. У Элвина есть таблица $n \times n$, заполненная вещественными числами (в каждой клетке записано ровно одно число). Назовём *ладейным множеством* множество из n клеток, расположенных как в n различных столбцах, так и в n различных строках. Предположим, что сумма чисел в клетках любого ладейного множества неотрицательна.

За ход Элвин выбирает строку, столбец, а также вещественное число a; к каждому числу в выбранной строке он прибавляет a, а из каждого числа в выбранном столбце — вычитает a (таким образом, число в пересечении строки и столбца не изменяется). Докажите, что Элвин может, сделав несколько ходов, добиться, чтобы все числа в таблице стали неотрицательными.

Общие замечания. Здесь собраны некоторые определения и простые наблюдения, используемые в решениях.

Назовём ладейное множество *неотрицательным* (соотв., *нулевым*), если сумма чисел в клетках этого множества неотрицательна (соотв., нулевая). Таблицу $n \times n$, заполненную вещественными числами, назовём *хорошей* (соотв., *сбалансированной*), если в ней все ладейные множества неотрицательны (соотв., нулевые).

Заметим, что при ходах Элвина сумма чисел в любом ладейном множестве не меняется, так что хорошие и сбалансированные таблицы остаются таковыми. Также заметим, что свойство таблицы быть хорошей (сбалансированной), так же как и требуемое утверждение, не меняются при перестановках строк и/или столбцов.

Доказательства следующих двух несложных предложений приведены в Дополнении после Решения 2.

Предложение 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности вещественных чисел с одинаковыми суммами. Тогда Элвин может совершить несколько ходов, результатом которых будет прибавление числа a_i ко всем клеткам i-й строки и вычитание числа b_j из всех клеток j-го столбца, при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Предложение 2. Если таблица $n \times n$ сбалансирована, то Элвин может совершить несколько ходов, после чего таблица будет заполнена нулями.

Решение 1. Начнём с доказательства известного следствия из леммы Холла.

Лемма. Пусть $G = (U \sqcup V, E)$ — двудольный мультиграф с долями U и V, состоящих из n вершин каждая. Пусть каждая вершина имеет степень k. Тогда рёбра G можно разбить на k совершенных паросочетаний.

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ тривиальна. Для шага индукции достаточно найти в G одно совершенное паросочетание: выбросив его рёбра, мы получим граф, в котором все степени вершин равны $k - 1$.

Существование такого паросочетания вытекает из леммы Холла. Действительно, пусть U' — подмножество в U, а V' — множество всех соседей вершин из U'. Положим $u = |U'|$ и $v = |V'|$. Суммарная степень вершин из U' равна ku, поэтому суммарная степень всех вершин из V' не меньше ku. Поэтому $ku \leq kv$, то есть $u \leq v$, что и доказывает, что условия леммы Холла выполнены. $\square$

Следующее утверждение — ключевое в этом решении.

Утверждение. В любой хорошей таблице ожно уменьшить числа в некоторых клетках так, чтобы получилась сбалансированная таблица.

Доказательство. Скажем, что клетка хорошей таблицы *устойчива*, если она содержится в нулевом ладейном множестве (так что, если уменьшить число в этой клетке, то таблица перестанет быть хорошей). Для начала мы покажем, что можно уменьшить числа в некоторых клетках хорошей таблицы так, чтобы она осталась хорошей, а все её клетки стали устойчивыми.

Рассмотрим любую клетку c; пусть ϵ — наименьшая сумма в ладейном множестве, содержащем c. Уменьшим число в клетке c на ϵ; таблица останется хорошей, а клетка c станет устойчивой. Проделав такую операцию со всеми клетками таблицы, мы получим хорошую таблицу, все клетки которой устойчивы. Мы докажем, что эта таблица сбалансирована.

В дальнейшем рассуждении мы используем следующее соответствие. Пусть R и C — множества всех строк и всех столбцов таблицы соответственно. Каждой клетке соответствует пара из строки и столбца, содержащих эту клетку; эту пару можно считать ребром двудольного (мульти)графа с долями R и C. Таким образом, каждому ладейному множеству соответствует совершенное паросочетание между этими долями.

Предполагая, что доказываемое утверждение неверно, выберем ненулевое ладейное множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Каждая клетка s_i содержится в некотором нулевом ладейном множестве V_i. Построим двудольный мультиграф $G = (R \sqcup C, E)$, включи в него, для каждого множества V_i, n рёбер, соответствующих клеткам в V_i (таким образом, в G ровно n^2 рёбер, некоторые из которых могут быть параллельными). Пометим каждое ребро числом, стоящим в соответствующей ему клетке таблицы. Поскольку все множества V_i нулевые, сумма всех n^2 пометок равна нулю.

Удалим теперь из G n рёбер, соответствующих клеткам из S; обозначим полученный граф через G'. Поскольку сумма чисел в клетках множества S положительна, сумма всех пометок на рёбрах графа G' отрицательна. С другой стороны, степени всех вершин в графе G' равны $n-1$, так что по Лемме его рёбра разбиваются на $n-1$ совершенное паросочетание. Хотя бы в одном из полученных паросочетаний сумма пометок будет отрицательной; это паросочетание соответствует ладейному множеству с отрицательной суммой. Значит. наша таблица — не хорошая; противоречие. $\square$

Вернёмся к решению. Пусть T — исходная таблица. По Утверждению, некоторые числа в T можно уменьшить так, чтобы получилась сбалансированная таблица B. По Предложению 2, Элвин может сделать несколько ходов в таблице S, получив таблицу, заполненную нулями. Применяя такие же ходы к своей таблице T, он получит таблицу, заполненную неотрицательными числами, что и требовалось.

Решение 2. Назовём *дефектом* таблицы сумму модулей всех отрицательных чисел, стоящих в ней. Решение состоит из двух шагов. На Шаге 1 мы покажем, что, если дефект хорошей таблицы ненулевой, то Элвин может совершить несколько ходов, в результате которых дефект уменьшится. На (техническом) шаге 2 мы покажем, что из этого утверждения вытекает утверждение задачи.

Шаг 1. Пусть строка r содержит хотя бы одно отрицательное число. Отметим все клетки в этой строке, содержащие отрицательные числа, а также отметим все клетки в других строках, содержащие *неположительные* числа. Тогда не существует ладейного множества, состоящего из отмеченных клеток, ибо сумма чисел в клетках такого множества была бы отрицательной.

По теореме Кёнига (эквивалентной лемме Холла), найдутся такие числа a и b, что $a + b < n$, и можно выбрать a строк и b столбцов, объединение которых содержит все отмеченные клетки. Зафиксируем такой выбор строк и столбцов. Пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо. Возможны два случая.

Случай 1: Строка r находится в числе выбранных a строк.

Переставим строки и столбцы так, чтобы выбранными оказались верхние a строк и правые b столбцов. Далее, если среди левых a чисел в строке r есть отрицательное, переставим столбец, содержащий такое число, со столбцом $n-b$; напомним, что $n-b > a$. Тогда в любом случае найдётся номер $x > a$ такой, что x-й слева элемент строки r отрицателен; при этом выбраны по-прежнему b правых столбцов.

Рассмотрим прямоугольник P в пересечении нижних $n-a$ строк и левых a столбцов таблицы. Все числа в нём положительны, поскольку он не содержит отмеченных клеток и не пересекается со строкой r. Пусть m — наименьшее число в этом прямоугольнике.

Пусть Элвин прибавит m к каждому числу в верхних a строках и вычтет m из всех клеток левых a столбцов. Все числа, которые уменьшатся в результате этого, находятся в прямоугольнике P; поэтому новых клеток с отрицательными числами не появится, и ни одно отрицательное число не уменьшится. Более того, согласно нашей процедуре, хотя бы одно отрицательное число (стоящее в пересечении строки r и столбца x) увеличится. Значит, дефект таблицы уменьшится, что и требовалось.

Случай 2: Строка r не выбрана.

Добавим строку r к a выбранным строкам (увеличив a на 1). Заметим, что отрицательные числа в этой строке находятся в b выбранных столбцах Как и в предыдущем случае, переставим строки и столбцы так, чтобы a выбранных строк стояли сверху, а b выбранных столбцов — справа. Тогда все отрицательные числа в строке r автоматически находятся в b правых столбцах. После этого наблюдения рассуждения из предыдущего случая проходят дословно.

Шаг 2. Покажем, что среди таблиц, которые Элвин может получить из исходной (назовём такие таблицы *достижимыми*), есть таблица с *наименьшим* дефектом. Применяя к этой таблице утверждение Шага 1, получим, что её дефект нулевой, что и доказывает утверждение задачи.

Заметим, что любая последовательность ходов Элвина приводит к результату вида, описанного в Предложении 1. Более того, вычитание какого-то числа ϵ из всех чисел a_i и из всех чисел b_j не меняет результата. Поэтому можно считать, что сумма чисел a_i и сумма чисел b_j равны нулю.

Пусть t_{ij} — число, стоящее в клетке (i,j) исходной таблицы T. Для любых двух последовательностей $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, суммы которых равны нулю, обозначим через $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ таблицу, полученную из T прибавлением числа a_i ко всем числам в i-й строке и вычитанием b_j из всех чисел в j-м столбце, при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$; в частности, $T = T(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Обозначим через $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ дефект таблицы $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Очевидно, функция f непрерывна. Теперь мы собираемся ограничить числа, которые имеет смысл ставить в последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть m — наибольшее число в T. Рассмотрим произвольные последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с нулевыми суммами, такие, что некоторое число a_i меньше, чем $-M = -(m+b)$. Существует номер j такой, что $b_j \geq 0$; тогда число в клетке (i,j) таблицы $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ есть $t_{ij} + a_i - b_j < m - M + 0 = -b$, поэтому $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > b = f(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Таким образом, все пары последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq b$, удовлетворяют неравенствам $a_i \geq -M$ и, аналогично, $b_j \geq -M$; отсюда следует, что $a_i \leq nM$ и $b_j \leq nM$ (поскольку суммы последовательностей — нулевые). Итак, для минимизации дефекта $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ можно рассматривать лишь последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, элементы которых лежат на отрезке $[-M, nM]$. Множество таких последовательностей — компакт, поэтому непрерывная функция f достигает на нём своего наименьшего значения.

Дополнение. Назовём *ценой* хода Элвина число a, выбранное на этом ходе.

Доказательство Предложения 1. Предположим, что Элвин применит ход цены a к строке i и столбцу j, а затем — ход цены $-a$ к строке i' и тому же столбцу j. Результатом этого будет прибавление числа a ко всем числам строки i и вычитание a из всех чисел строки i'. Аналогичные действия Элвин может проделывать со столбцами.

Таким образом, Элвин может прибавить в числам первой строки число $\Sigma = a_1 + \cdots + a_n$ и вычесть его же из чисел первого столбца, а затем распределить эти прибавки и вычитания по строкам и столбцам, как описано выше. $\square$

Доказательство Предложения 2. Используя предложение 1, нетрудно видеть, что Элвин может обнулить все числа первого столбца и все числа первой строки, кроме последнего числа в ней.

Полученная таблица сбалансирована. Обозначим через d_{ij} число в её клетке (i,j). Для любых $i, j > 1$ таких, что $j < n$, существуют два ладейных множества R и R'; одно, содержащее клетки $(1,1)$ и (i,j), а другое — полученное из первого заменой этих клеток на клетки $(1,j)$ и $(i,1)$. Суммы чисел, стоящих в клетках этих множеств, нулевые и потому равны; значит,

$$d_{ij} = d_{i1} + d_{1j} - d_{11} = 0.$$

Таким образом, лишь последний столбец полученной таблицы мог бы содержать ненулевые числа. Однако каждая клетка этого столбца содержится в нулевом ладейном множестве, все остальные числа в котором — нули; так что число в этой клетке также равно нулю. $\square$

Решение 3 (набросок). Мы будем использовать некоторые стандартные методы многомерной выпуклой геометрии.

Каждую таблицу, заполненную числами, мы воспринимаем как точку в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$. Множество G всех хороших таблиц — это выпуклый конус в этом пространстве, заданный $n!$ нестрогими неравенствами (утверждающими, что суммы чисел в ладейных множествах неотрицательны). Поэтому этот конус замкнут.

Множество T всех таблиц, из которых Элвин может получить таблицу из неотрицательных чисел — также выпуклый конус. Этот конус является суммой Минковского двух множеств: (замкнутого) конуса N, состоящего из всех неотрицательных таблиц, и линейного подпространства V, состоящего из всех «приавок», которые Элвин может сделать. Такая сумма также является замкнутым множеством (по сути, в Шаге 2 Решения 2 приведено «приземлённое» доказательство именно этого утверждения).

Нетрудно видеть, что $T \subseteq G$; поэтому в задаче требуется доказать, что $T = G$. Предполагая противное, выберем таблицу $t \in G \setminus T$. Тогда существует линейная функция f, отделяющая t от T — именно, f принимает неотрицательные значения на T, но $f(t) < 0$.

Эта функция имеет следующий вид: Для любой таблицы $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$, состоящей из чисел x_{ij}, имеем

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_{ij},$$

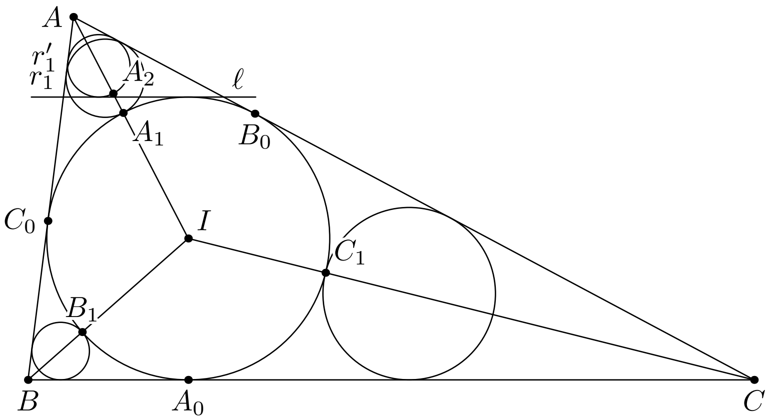
где f_{ij} — некоторые вещественные константы. Обозначим через F таблицу, состоящую из чисел f_{ij}.

Поскольку $f(x) \geq 0$ для всех таблиц $x \in N$, в которых лишь одно число ненулевое, имеем $f_{ij} \geq 0$ при всех i и j. Более того, f должна обнуляться на всём подпространстве V, в частности — на всех таблицах, в которых одна строка заполнена числами 1, один столбец — числами -1, а все остальные элементы)как и элемент в пересечении особых строки и столбца) — нули. Это значит, что сумма чисел в любой строке F равна сумме чисел в любом её столбце.

Осталось показать, что F является суммой нескольких *ладейных таблиц*, то есть таблиц, содержащих одно и то же неотрицательное число p во всех клетках одного ладейного множества и нули в остальных клетках; это будет означать, что $f(t) \geq 0$, что не так. Другими словами, нам осталось показать, что из F можно вычесть несколько ладейных таблиц так, чтобы получить таблицу из нулей. Это нетрудно сделать с помощью леммы Холла: если таблица содержит положительные числа, то в ней есть n клеток. содержащих положительные числа и образующих ладейное множество. Тогда можно вычитанием ладейной таблицы обнулить одно из этих чисел, оставив остальные неотрицательными.

№4. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r. Окружности с радиусами r_1, r_2, r_3 (здесь $r_1, r_2, r_3 < r$) вписаны в углы A, B, C соответственно так, что каждая из них касается вписанной окружности внешним образом. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant r$.

Первое решение. Пусть ω — вписанная окружность $\triangle ABC$, а I — её центр, $p = (AB + BC + AC)/2$ — полупериметр. Обозначим точку касания ω со сторонами BC, AC, AB через A_0, B_0, C_0 соответственно. Пусть окружность радиуса r_1 касается вписанной окружности в точке A_1.



Проведем касательную прямую ℓ к ω такую, что $\ell \parallel BC$. Обозначим через r_1' радиус вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB, AC, ℓ. Прямая AI пересекает окружность с радиусом r_1' в двух точках. Из этих двух точек через A_2 обозначим ближайшую к I. Тогда $\frac{r_1}{r_1'} = \frac{AA_1}{AA_2} \geq 1$ и $\frac{r_1'}{r} = \frac{AB_0}{p}$ (здесь мы воспользовались тем, что полупериметр треугольника, образованного прямыми AB, AC, ℓ равен AB_0 и этот треугольник подобен $\triangle ABC$). Применяя те же рассуждения к окружностям с радиусами r_2' и r_3' и складывая полученные неравенства, имеем:

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq r_1' + r_2' + r_3' = r\left(\frac{AB_0}{p} + \frac{BC_0}{p} + \frac{CB_0}{p}\right) = r.$$

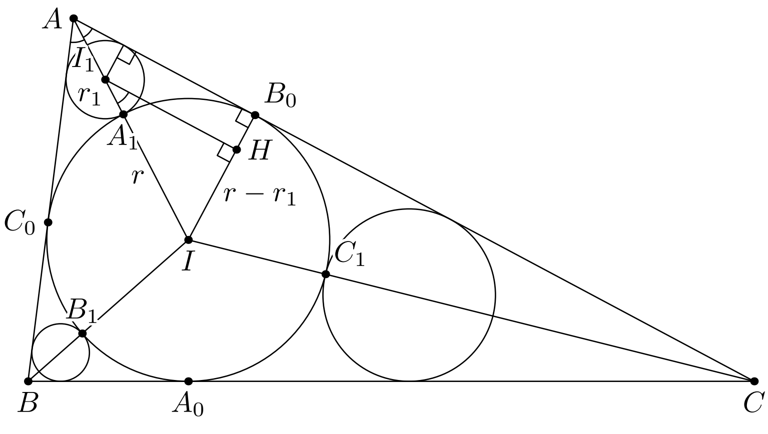
Второе решение. Так же, как и в первом решении, отметим точки A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1. Тогда $\angle B_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, $\angle A_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$, $\angle A_1IB_1 = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. Очевидно, что

$$\left(\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1} + \overrightarrow{IC_1}\right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Тогда из (1) получим

$$r^2 + r^2 + r^2 + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle A}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle B}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle C}{2}\right) \geq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\frac{\angle A}{2} + \sin\frac{\angle B}{2} + \sin\frac{\angle C}{2} \leq \frac{3}{2}. \tag{2}$$



Пусть I_1 — центр окружности радиуса r_1. Опустим перпендикуляр I_1H из точки I_1 на прямую IB_0. Тогда в прямоугольном треугольнике II_1H один из острых углов равен $\frac{\angle A}{2}$, катет, лежащий напротив этого угла, равен $r - r_1$, а гипотенуза равна $r + r_1$. Следовательно, $\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{r - r_1}{r + r_1}$. Аналогично получим $\sin\frac{\angle B}{2} = \frac{r - r_2}{r + r_2}$ и $\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{r - r_3}{r + r_3}$. Согласно неравенству (2)

$$\frac{r - r_1}{r + r_1} + \frac{r - r_2}{r + r_2} + \frac{r - r_3}{r + r_3} \leq \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2r}{r + r_1} + \frac{2r}{r + r_2} + \frac{2r}{r + r_3} \leq \frac{9}{2}\,. \tag{3}$$

По неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\frac{1}{r + r_1} + \frac{1}{r + r_2} + \frac{1}{r + r_3} \geq \frac{9}{r + r_1 + r + r_2 + r + r_3}\,, \tag{4}$$

следовательно, из (3) и (4) получим $\frac{9}{2} \geq \frac{18r}{3r + r_1 + r_2 + r_3} \;\Leftrightarrow\; r_1 + r_2 + r_3 \geq r$.

№5. На вечеринку пришли 99 гостей. Двое ведущих вечеринки, Анна и Боб, играют в следующую игру (ведущие не входят в число гостей). По кругу расставлены 99 стульев; изначально все гости ходят вокруг стульев. Ведущие делают ходы по очереди. За ход ведущий выбирает стоящего гостя и указывает ему свободный стул c, на который тот должен сесть; если хотя бы один стул, соседний с c, занят, то тот же ведущий велит одному гостю на стуле, соседнем с c, встать (если оба стула, соседних с c, заняты, ведущий выбирает один из них). Все указания исполняются немедленно. Анна ходит первой; её цель — добиться, чтобы после какого-то её хода хотя бы k стульев были заняты. При каком наибольшем k Анна может добиться цели, как бы ни действовал Боб?

Ответ. $k = 34$.

Решение. *Предварительные замечания.* Обозначим через F количество занятых стульев в текущий момент игры. Заметим, что на каждом ходу F не уменьшается. Таким образом, нам нужно найти наибольшее количество занятых стульев k, которое Анна может гарантировать после *произвольного* хода (её или соперника).

Назовём ситуацию в игре *стабильной*, если у каждого свободного стула есть соседний занятый стул. Поскольку заняты или соседствуют с занятыми максимум $3F$ стульев, в любой стабильной ситуации имеем $F \geq 33$. Более того, тоже соображение показывает, что есть единственная (с точностью до поворота) стаильная ситуация, в которой $F = 33$ (когда ровно каждый третий стул занят); назовём такую ситуацию *плохой.*

Если ситуация после хода Боба стабильна, он может дальше играть так, чтобы значение F больше никогда не увеличилось. Именно, если Анна своим ходом сажает гостя на стул a и освобождает соседний стул b, Боб может посадить гостя на стул b и освободить a, возвращаясь к той же стабильной ситуации.

С другой стороны, если ситуация после хода Боба нестабильна, то найдётся свободный стул a, соседние с которым также свободны. Тогда Анна может посадить на него гостя, увеличив F.

Стратегия для Анны, когда $k \leqslant 34$. Вкратце, стратегия Анны — *каждым ходом увеличивать значение F, избегая появления плохой ситуации после хода Боба (наоборот, Анна создаёт плоху ситуацию после своего хода, если может).*

Таким образом, на каждом своём ходу Анна делает произвольный ход, увеличивающий значение F, если это не приводит к опасности появления плохой ситуации после ответного хода Боба (в частности, Анна не заставляет гостей вставать). Разберём исключительные случаи, в которых опасность появляется.

Случай 1. Пусть Анна может посадить гостя на стул a, после чего F увеличивается до 32, и Боб может добиться плохой ситуации, посадив ещё одного гостя. Это значит, что после хода Анны все занятые стула расположены “через три”, за одним искоючением. Но тогда Анна может посадить гостя не на стул a, а на соседний с ним (оба его соседа также свободны!), избегая опасности.

Случай 2. Пусть Анна может посадить гостя на стул a, после чего F увеличивается до 33, и Боб может добиться плохой ситуации, посадив ещё одного гостя на стул b и подняв гостя с соседнего стула c. Если $a = c$, то Анна может своим ходом посадить гостя не на a, а на b, добившись плохой ситуации после *своего* хода; тогда Боб своим ходом вынужден будет нарушить стабильность ситуации. Иначе, как и в предыдущем случае, Анна может посадить гостя не на a, а на один из соседних стульев, всё ещё увеличивая F, но избегая опасности.

Действуя таким образом, Анна увеличивает F каждым ходом, пока $F \leqslant 33$. Поэтому она добьётся значения $F = 34$.

Стратегия для Боба, когда $k \geqslant 35$. Разобьём все стулья на 33 группы по три рядом стоящих стула, и пронумеруем группы числами от 1 до 33 так, что первым ходом Анна использует стул из группы 1. Вкратце, Боб действует так, чтобы после каждого его хода выполнялось следующее условие:

> $(*)$ В группе 1 занято не более двух стульев, а в каждой оставшейся группе лишь средний стул может быть занят.

Если условие $(*)$ выполнено после хода Боба, то $F \leqslant 34 < k$; поэтому постоянное выполнение этого свойства гарантирует, что Боб не проиграет.

Осталось показать, что Боб всегда сможет сохранять выполнение условия $(*)$ после своего хода. Очевидно, он может это сделать на первом ходу.

Пусть Анна на очередном ходу сажает гостя на стул a и освобождает соседний стул b; тогда Боб может просто посадить гостя на стул b и освободить a.

Пусть теперь Анна на своём ходе просто сажает гостя на стул a (а соседние с ним стулья свободны). В частности, в группе 1 по-прежнему есть свободный стул. Если полученная ситуация уже удовлетворяет $(*)$, то Боб просто сажает гостя на свободный стул в группе 1 (по возможности — средний) и, если надо, освобождает другой стул в этой же группе. Если же $(*)$ нарушено, то a находится в некоторой группе i (при $i \geqslant 2$), и не является средним стулом там. Тогда Боб сажает гостя на средний стул группы i и освобождает стул a.

Действуя таким образом, Боб всё время добивается выполнения $(*)$.

№6. Пусть $P(x)$ – непостоянный многочлен степени n с рациональными коэффициентами, который нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с рациональными коэффициентами. Докажите, что количество многочленов $Q(x)$ с рациональными коэффициентами, степени, меньшей n, таких, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$,

а) конечно;

б) не превосходит n.

Решение. Как известно, неприводимый многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами имеет n различных комплексных корней, которые мы обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

а) Если $P(Q(x))$ делится на $P(x)$, то для каждого $k \le n$ число $Q(\alpha_k)$ также должно быть корнем $P(x)$. Таким образом, значения многочлена Q в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют некоторый упорядоченный набор $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$, все числа в котором – корни P, возможно, повторяющиеся. Количество таких наборов n^n, и для каждого из них существует не более одного многочлена Q такого, что $Q(\alpha_k) = \alpha_{i_k}$ (поскольку два многочлена степени, меньшей n, принимающие одинаковые значения в n точках, совпадают).

Таким образом, количество возможных многочленов $Q(x)$ не превосходит n^n.

б) Для каждого многочлена Q, удовлетворяющего условию задачи, $Q(\alpha_1)$ должно быть равно одному из α_i. Однако многочленов с рациональными коэффициентами степени, меньшей n, для которых $Q(\alpha_1) = \alpha_i$, не более одного. Действительно, если $Q_1(\alpha_1) = Q_2(\alpha_1) = \alpha_i$, то α_1 является корнем многочлена $Q_1 - Q_2$ с рациональными коэффициентами степени, меньшей n. Если этот многочлен – не тождественный ноль, то его наибольший общий делитель с P имеет рациональные коэффиценты, степень меньше n и является непостоянными делителем P, что противоречит условию.

Таким образом, количество возможных многочленов $Q(x)$ не превосходит n.