

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА**Внимание: баллы в оценках не делятся!****Задача 1 (10.0 балла)****Задача 1.1 (4.0 балла)**

Пусть x – сжатие пружины, а y – изменение уровня воды в том колене трубки, в котором находятся поршни. При движении воды в трубке на тело будет действовать сила инерции, которая равна

$$F = -m\ddot{y}, \quad (1)$$

так что уравнение движения тела записывается как

$$m\ddot{x} = -kx + mg - m\ddot{y}. \quad (2)$$

Уравнение движения воды в трубке имеет вид

$$\rho sl\ddot{y} = -2\rho sgy + kx. \quad (3)$$

Новое положение равновесия определяется условиями $x = x_0 = const$ и $y = y_0 = const$, так что подстановка в уравнения (2) и (3) дает

$$x_0 = \frac{mg}{k}, \quad (4)$$

$$y_0 = \frac{kx_0}{2\rho gs} = \frac{m}{2\rho s}. \quad (5)$$

По условию сказано, что система совершает гармонические колебания около нового положения равновесия, поэтому ищем решение уравнений (2) и (3) в следующем виде

$$x = x_0 + A \cos \omega t, \quad (6)$$

$$y = y_0 + B \cos \omega t, \quad (7)$$

и после подстановки получаем следующую систему уравнений

$$A(\omega_1^2 - \omega^2) = B\omega^2, \quad (8)$$

$$A\omega_3^2 = B(\omega_2^2 - \omega^2), \quad (9)$$

где $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{2g}{l}$, $\omega_3^2 = \frac{k}{\rho sl}$.

После деления уравнений (8) и (9), получаем квадратное уравнение для возможных частот колебаний

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \omega^2 \omega_3^2, \quad (10)$$

которое имеет решения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}. \quad (11)$$

Отметим, что оба корня всегда являются положительными и дают следующие возможные частоты гармонических колебаний

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}} = 5.19c^{-1}, \quad (12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}} = 12.07c^{-1}. \quad (13)$$

В реальности движение системы будет представлять собой сложение гармонических колебаний с частотами (12) и (13).

Содержание	Баллы
Формула (1): $F = -m\ddot{y}$	0.3
Формула (2): $m\ddot{x} = -kx + mg - m\ddot{y}$	0.3
Формула (3): $\rho sl\ddot{y} = -2\rho sgy + kx$	0.3

Формула (4): $x_0 = \frac{mg}{k}$	0.3
Формула (5): $y_0 = \frac{kx_0}{2\rho gs} = \frac{m}{2\rho s}$	0.3
Формула (6): $x = x_0 + A \cos \omega t$	0.3
Формула (7): $y = y_0 + B \cos \omega t$	0.3
Формула (8): $A(\omega_1^2 - \omega^2) = B\omega^2$	0.2
Формула (9): $A\omega_3^2 = B(\omega_2^2 - \omega^2)$	0.2
Формула (10): $(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \omega^2 \omega_3^2$	0.4
Формула (11): $\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}$	0.3
Формула (12): $\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}}$	0.2
Численное значение в формуле (12): $\omega_1 = 5.19c^{-1}$	0.2
Формула (13): $\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{2}}$	0.2
Численное значение в формуле (13): $\omega_2 = 12.07c^{-1}$	0.2
Итого	4.0

Задача 1.2 (3.0 балла)

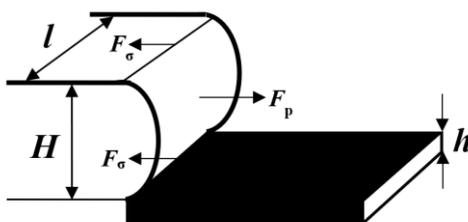
Пластинка имеет объем

$$V = a^2 h, \quad (1)$$

и на нее действует сила тяжести

$$F_p = \rho V g. \quad (2)$$

В месте контакта пластинки и воды возникает разность уровней воды H , как показано на рисунке ниже.



В результате на нижнюю поверхность пластинки площадью

$$S = a^2 \quad (3)$$

действует разность давлений

$$\Delta p = \rho_0 g (H + h), \quad (4)$$

что приводит к появлению направленной вертикально вверх силы

$$F = \Delta p S. \quad (5)$$

Для определения величины H выделим некоторый объем воды шириной l вблизи ее контакта с пластинкой. На него действует сила поверхностного натяжения, равная

$$F_\sigma = 2\sigma l, \quad (6)$$

а также сила, обусловленная давлением столба жидкости

$$F_p = \bar{p} \Delta S, \quad (7)$$

где среднее давление записывается как

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho_0 g H \quad (8)$$

при площади сечения

$$\Delta S = Hl. \quad (9)$$

Из условия равновесия воды

$$F_\sigma = F_{\bar{p}} \quad (10)$$

следует, что перепад высот равен

$$H = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 g}}. \quad (11)$$

На дополнительный груз на пластинке действует сила тяжести, равная

$$F_m = mg, \quad (12)$$

и из условия равновесия

$$F_p + F_m = F \quad (13)$$

находим массу груза

$$m = (\rho_0 - \rho) a^2 h + 2a^2 \sqrt{\frac{\sigma \rho_0}{g}} = 52.6 \text{ г}. \quad (14)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $V = a^2 h$	0.2
Формула (2): $F_p = \rho V g$	0.2
Формула (3): $S = a^2$	0.2
Формула (4): $\Delta p = \rho_0 g (H + h)$	0.2
Формула (5): $F = \Delta p S$	0.2
Формула (6): $F_\sigma = 2\sigma l$	0.2
Формула (7): $F_{\bar{p}} = \bar{p} \Delta S$	0.2
Формула (8): $\bar{p} = \frac{1}{2} \rho_0 g H$	0.2
Формула (9): $\Delta S = Hl$	0.2
Формула (10): $F_\sigma = F_{\bar{p}}$	0.2
Формула (11): $H = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 g}}$	0.2
Формула (12): $F_m = mg$	0.2
Формула (13): $F_p + F_m = F$	0.2
Формула (14): $m = (\rho_0 - \rho) a^2 h + 2a^2 \sqrt{\frac{\sigma \rho_0}{g}}$	0.2
Численное значение в формуле (14): $m = 52.6 \text{ г}$	0.2
Итого	3.0

Задача 1.3 (3.0 балла)

Ток через катушку индуктивности мгновенно измениться не может и сразу после замыкания ключа K остается равным нулю. При этом, так как сопротивления подводящих проводов очень мало, то практически мгновенно заряжаются конденсаторы C_1 и C_2 до зарядов q_{10} и q_{20} соответственно, а конденсатор C_3 останется не заряженным

$$q_{30} = 0, \quad (1)$$

так как он заряжается через катушку индуктивности. Отметим, что в проводах выделяется джоулево тепло.

Таким образом, в начальный момент времени конденсаторы C_1 и C_2 подключены последовательно к источнику постоянного напряжения U_0 и заряды их равны

$$q_{10} = q_{20}, \quad (2)$$

а напряжения на них складываются, так что

$$\frac{q_{10}}{C_1} + \frac{q_{20}}{C_2} = U_0. \quad (3)$$

Таким образом, из уравнений (2) и (3) находим

$$q_{10} = q_{20} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0. \quad (4)$$

Полная энергия системы сразу после замыкания ключа K оказывается равной

$$W_0 = \frac{q_{10}^2}{2C_1} + \frac{q_{20}^2}{2C_2} = \frac{C_1 C_2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (5)$$

После зарядки конденсаторов C_1 и C_2 ток через катушку начинает возрастать и в системе начинаются гармонические колебания, при которых уже можно пренебречь джоулевыми потерями, так как сопротивления подводящих проводов мало.

Заметим, что в тот момент времени, когда ток в катушке максимален, напряжение на ней равно нулю и конденсаторы C_2 и C_3 оказываются включенными параллельно. Для такого соединения конденсаторов выполняются следующие соотношения для зарядов

$$q_1 = q_2 + q_3. \quad (6)$$

$$\frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3}. \quad (7)$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U_0. \quad (8)$$

Решая совместно систему уравнений (6)-(8), находим заряды конденсаторов

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} U_0. \quad (9)$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} U_0. \quad (10)$$

$$q_3 = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U_0, \quad (11)$$

а энергия системы в этом состоянии очевидно равна

$$W = \frac{C_1(C_2 + C_3)U_0^2}{2(C_1 + C_2 + C_3)} + \frac{LI_{\max}^2}{2}. \quad (12)$$

Работа источника при этом составляет величину

$$A = (q_1 - q_{10})U_0, \quad (13)$$

а закон сохранения энергии записывается в виде

$$W_0 + A = W, \quad (14)$$

откуда находим максимальный ток

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)L}} C_1 U_0. \quad (15)$$

Нахождение минимального напряжения U_{\min} на конденсаторе C_2 несколько более сложная задача, которая имеет простое решение. Очевидно, что в системе происходят гармонические колебания, при которых постоянно потенциальная энергия переходит в кинетическую. Для

представленной электрической цепи роль кинетической энергии играет энергия катушки индуктивности. Следовательно, когда ток через катушку равен нулю, то система находится в самом крайнем положении, при этом напряжение на конденсаторе C_2 равно

$$U_{20} = \frac{q_{20}}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0. \quad (16)$$

Отметим, что равенство тока нулю соответствует начальному моменту замыкания ключа K .

После того, как пройдет четверть периода, ток в катушке становится максимальным, система проходит через положение равновесия и напряжение на конденсаторе C_2 падает до значения

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} U_0, \quad (17)$$

то есть падает на величину $U_{20} - U_2$. Еще через четверть периода напряжение на конденсаторе упадет еще на такую же величину, которая в тоже время равна $U_2 - U_{\min}$, поэтому искомое минимальное напряжение оказывается равным

$$U_{\min} = 2U_2 - U_{20} = \frac{C_1(C_1 + C_2 - C_3)}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)} U_0. \quad (18)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $q_{30} = 0$	0.2
Формула (2): $q_{10} = q_{20}$	0.2
Формула (3): $\frac{q_{10}}{C_1} + \frac{q_{20}}{C_2} = U_0$	0.2
Формула (4): $q_{10} = q_{20} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0$	0.2
Формула (5): $W_0 = \frac{q_{10}^2}{2C_1} + \frac{q_{20}^2}{2C_2} = \frac{C_1 C_2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)}$	0.2
Формула (6): $q_1 = q_2 + q_3$	0.2
Формула (7): $\frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3}$	0.2
Формула (8): $\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U_0$	0.2
Формула (10): $q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} U_0$	0.2
Формула (12): $W = \frac{C_1(C_2 + C_3)U_0^2}{2(C_1 + C_2 + C_3)} + \frac{LI_{\max}^2}{2}$	0.2
Формула (13): $A = (q_1 - q_{10})U_0$	0.2
Формула (14): $W_0 + A = W$	0.2
Формула (15): $I_{\max} = \sqrt{\frac{C_3}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)L}} C_1 U_0$	0.2
Формула (18): $U_{\min} = 2U_2 - U_{20}$	0.2
Формула (18): $U_{\min} = \frac{C_1(C_1 + C_2 - C_3)}{(C_1 + C_2)(C_1 + C_2 + C_3)} U_0$	0.2
Итого	3.0

Задача 2. Термодинамика однокомпонентной плазмы (10.0 балла)

2.1 Наименьшее расстояние между соседними ядрами дейтерия совпадает с ребром куба, а так как на 1 куб приходится 1 ядро, то их концентрация равна

$$n = \frac{1}{a^3}, \quad (1)$$

откуда следует

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 8.51 \cdot 10^{-12} \text{ м} \quad (2)$$

2.2 Электростатическая энергия взаимодействия двух ядер, находящихся на расстоянии a друг от друга равна

$$W_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad (3)$$

а их тепловая энергия находится по формуле

$$E_T = k_B T, \quad (4)$$

откуда искомое отношение получается в виде

$$\Gamma = \frac{W_p}{E_T} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a k_B T} = 111. \quad (5)$$

2.3 В целом сферическая ячейка является нейтральной, а ее радиус равен

$$R = a / 2 \quad (6)$$

и объем

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (7)$$

поэтому объемная плотность заряда равна

$$\rho = -\frac{e}{V} = -\frac{6e}{\pi a^3} = -\frac{6}{\pi} n e = -4.95 \cdot 10^{14} \text{ Кл} / \text{ м}^3. \quad (8)$$

2.4 Запишем теорему Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (9)$$

для сферы радиуса r с центром в месте расположения ядра. Поток вектора напряженности электрического поля E через эту сферу в силу симметрии равен

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2, \quad (10)$$

а полный заряд Q внутри этой сферы составляет

$$Q = e + \rho \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (11)$$

Из уравнений (9)-(11) находим

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad (12)$$

а искомая разность потенциалов определяется выражением

$$\varphi(a/4) - \varphi(a/2) = - \int_{a/2}^{a/4} E dr, \quad (13)$$

откуда получаем

$$\varphi(a/4) - \varphi(a/2) = \frac{5e}{16\pi\epsilon_0 a} = 211 \text{ В}. \quad (14)$$

2.5 Второй член в правой части выражения (12) определяет напряженность электрического поля, создаваемого однородным распределением заряда, поэтому уравнение движения ядра в проекции на радиальное направление имеет вид

$$m\ddot{r} = \frac{e\rho}{3\varepsilon_0} r, \quad (15)$$

то есть представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega_p = \sqrt{-\frac{e\rho}{3m_p\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2e^2}{\pi m_p\varepsilon_0 a^3}} = \sqrt{\frac{2ne^2}{\pi m_p\varepsilon_0}} = 2.94 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}. \quad (16)$$

2.6 При фиксированной температуре среднеквадратичная тепловая скорость ядра равна

$$v = \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}}, \quad (17)$$

а соответствующая амплитуда отклонения от положения равновесия определяется как

$$A = \frac{v}{\omega_p} = 2,85 \cdot 10^{-13} \text{ м}. \quad (18)$$

Видно, что выполняется условие $A \ll a$, то есть ядра дейтерия действительно совершают малые колебания возле положения равновесия.

2.7 Внутренняя энергия системы складывается из тепловой энергии хаотического движения ядер и электростатической энергии каждой ячейки. В свою очередь, электростатическая энергия каждой ячейки состоит их энергии взаимодействия ядер с окружающим электронным нейтрализующим фоном и энергии самого фона.

Разобьем ячейку на сферические слои и рассмотрим слой, находящийся на расстоянии r от ядра и имеющий толщину dr . Его заряд равен

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr, \quad (19)$$

а соответствующая энергия взаимодействия с ядром равна

$$W_1 = \int_0^R \frac{edq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{3e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \quad (20)$$

Плотность энергии электрического поля находится по формуле

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad (21)$$

а так как напряженность электрического поля однородного фона определяется вторым слагаемым в выражении (12), а снаружи сферы имеет вид как у точечного заряда, который формально совпадает с первым членом формулы (12), то отсюда определяется электростатическая энергия самого однородного фона

$$W_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{3e^2}{10\pi\varepsilon_0 a}. \quad (22)$$

Таким образом, полная электростатическая энергия одной ячейки записывается как

$$W = W_1 + W_2 = -\frac{9e^2}{20\pi\varepsilon_0 a} \quad (23)$$

и равна работе, которую необходимо совершить для ее создания.

Как было показано выше, ядро в центре ячейки представляет собой трехмерный гармонический осциллятор, поэтому тепловая хаотическая энергия равна

$$E = 3Nk_B T, \quad (24)$$

а значит внутренняя энергия N ячеек имеет вид

$$U = E + NW = 3Nk_B T - \frac{9e^2}{20\pi\varepsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}}. \quad (25)$$

Таким образом, искомые постоянные равны

$$\alpha_1 = 3k_B T, \quad (26)$$

$$\alpha_2 = -\frac{9e^2}{20\pi\varepsilon_0}. \quad (27)$$

2.8 В отсутствии нейтрализующего окружающего фона у каждого из ядер их сближение соответствует наличию самого кулоновского барьера. Наличие нейтрализующего окружения приводит к снижению кулоновского барьера, которое, очевидно, определяется взаимодействием ядер с самим окружением и собственной энергией окружения, то есть выражением (23). Тепловая энергия ядер при этом остается малой по сравнению со снижением барьера.

Каждая из двух ячеек до слияния имела электростатическую энергию

$$W = -\frac{9e^2 n^{1/3}}{20\pi\epsilon_0}. \quad (28)$$

После слияния образуется новая ячейка объемом

$$V' = 2V \quad (29)$$

с ядром гелия в центре, имеющем электрический заряд

$$e' = 2e. \quad (30)$$

В соответствии с общей формулой, электростатическая энергия образовавшейся ячейки равна

$$W' = -2^{5/3} \frac{9e^2 n^{1/3}}{20\pi\epsilon_0}, \quad (31)$$

откуда получается следующее выражение для снижения кулоновского барьера

$$\delta U_c = 2W - W' = \frac{(2^{2/3} - 1)9e^2 n^{1/3}}{10\pi\epsilon_0} = 5.72 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}. \quad (32)$$

2.9 Круговой процесс $ABCD$ представляет собой цикл Карно. Обозначим температуру на изотерме AB как T_{AB} , а на изотерме CD – T_{CD} , при этом они очень мало отличаются друг от друга, так что $T_{AB} \approx T_{CD} \approx T$ и $T_{AB} - T_{CD} \ll T$. Работа A , совершаемая в круговом цикле, равна площади параллелограмма $ABCD$, которая равна площади параллелограмма $ABEF$. Так как $AF = (\partial P / \partial T)_V (T_{AB} - T_{CD})$, то работа в цикле равна

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V (T_{AB} - T_{CD})(V_B - V_A). \quad (33)$$

В процессе AB температура постоянная, поэтому изменение внутренней энергии равно

$$U_B - U_A = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T (V_B - V_A), \quad (34)$$

а значит сообщенное количество теплоты по первому началу термодинамики принимает вид

$$Q = U_B - U_A + P(V_B - V_A). \quad (35)$$

Так как процесс $ABCD$ представляет собой цикл Карно, то его КПД равен

$$\frac{A}{Q} = \frac{T_{AB} - T_{CD}}{T_{AB}}, \quad (36)$$

и комбинируя уравнения (33)-(36), получаем искомое соотношение

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P. \quad (37)$$

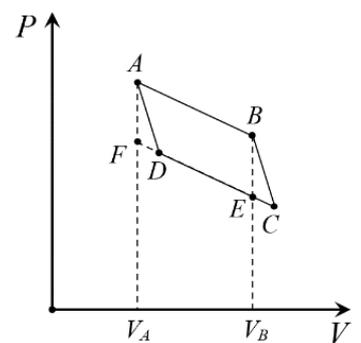
2.10 Подставляя формулу (25) в уравнение (37), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}, \quad (38)$$

решение которого имеет вид

$$P(T, V) = C(V)T - \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}, \quad (39)$$

где $C(V)$ – некоторая постоянная, которая в принципе может зависеть от объема системы.



В отсутствие взаимодействия между ядрами давление системы должно сводиться к давлению идеального газа

$$P(T, V)|_{e \rightarrow 0} = \frac{Nk_B T}{V}, \quad (40)$$

откуда сразу находим

$$P(T, V) = \frac{Nk_B T}{V} - \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}. \quad (41)$$

Таким образом, искомые постоянные равны

$$\beta_1 = k_B T, \quad (42)$$

$$\beta_2 = -\frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0}, \quad (43)$$

$$\beta_3 = \frac{4}{3}. \quad (44)$$

Подставляя численные значения, получаем для давления величину

$$P = -2,59 \cdot 10^{16} \text{ Па}. \quad (45)$$

Давление оказалось отрицательным! На самом деле давление всей системы включает в себя давление электронной компоненты, и оно положительное.

	Содержание	Баллы	
2.1	Формула (2): $a = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	0.2	0.4
	Численное значение в формуле (2): $a = 8.51 \cdot 10^{-12} \text{ м}$	0.2	
2.2	Формула (3): $W_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$	0.2	0.8
	Формула (4): $E_T = k_B T$	0.2	
	Формула (5): $\Gamma = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a k_B T}$	0.2	
	Численное значение в формуле (5): $\Gamma = 111$	0.2	
2.3	Формула (6): $R = a / 2$	0.1	0.6
	Формула (7): $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	0.1	
	Формула (8): $\rho = -\frac{6}{\pi} n e$	0.2	
	Численное значение в формуле (8): $\rho = -4.95 \cdot 10^{14} \text{ Кл} / \text{ м}^3$	0.2	
2.4	Формула (9): $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	0.2	1.4
	Формула (10): $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2$	0.2	
	Формула (11): $Q = e + \rho \frac{4}{3} \pi r^3$	0.2	
	Формула (12): $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$	0.2	
	Формула (13): $\varphi(a/4) - \varphi(a/2) = -\int_{a/2}^{a/4} E dr$	0.2	

	Формула (14): $\varphi(a/4) - \varphi(a/2) = \frac{5e}{16\pi\epsilon_0 a}$	0.2	
	Численное значение в формуле (14): $\varphi(a/4) - \varphi(a/2) = 211B$	0.2	
2.5	Уравнение (15): $m\ddot{r} = \frac{e\rho}{3\epsilon_0} r$	0.2	0.6
	Формула (16): $\omega_p = \sqrt{\frac{2ne^2}{\pi m_p \epsilon_0}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (16): $\omega_p = 2.94 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$	0.2	
2.6	Уравнение (17): $v = \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}}$	0.2	0.6
	Формула (18): $A = \frac{v}{\omega_p}$	0.2	
	Численное значение в формуле (18): $A = 2.85 \cdot 10^{-13} \text{ м}$	0.2	
2.7	Формула (19): $dq = \rho 4\pi r^2 dr$	0.2	1.8
	Формула (20): $W_1 = -\frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$	0.2	
	Формула (21): $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	0.2	
	Формула (22): $W_2 = \frac{3e^2}{10\pi\epsilon_0 a}$	0.2	
	Формула (23): $W = -\frac{9e^2}{20\pi\epsilon_0 a}$	0.2	
	Формула (24): $E = 3Nk_B T$	0.2	
	Формула (25): $U = E + NW = 3Nk_B T - \frac{9e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}}$	0.2	
	Формула (26): $\alpha_1 = 3k_B T$	0.2	
Формула (27): $\alpha_2 = -\frac{9e^2}{20\pi\epsilon_0}$	0.2		
2.8	Формула (28): $W = -\frac{9e^2 n^{1/3}}{20\pi\epsilon_0}$	0.2	1.2
	Формула (29): $V' = 2V$	0.2	
	Формула (30): $e' = 2e$	0.2	
	Формула (31): $W' = -2^{5/3} \frac{9e^2 n^{1/3}}{20\pi\epsilon_0}$	0.2	
	Формула (32): $\delta U_c = \frac{(2^{2/3} - 1)9e^2 n^{1/3}}{10\pi\epsilon_0}$	0.2	
	Численное значение в формуле (32): $\delta U_c = 5.72 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$	0.2	
2.9	Формула (33): $A = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_{AB} - T_{CD})(V_B - V_A)$	0.2	1.0

	Формула (34): $U_B - U_A = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T (V_B - V_A)$	0.2	
	Формула (35): $Q = U_B - U_A + P(V_B - V_A)$	0.2	
	Формула (36): $\frac{A}{Q} = \frac{T_{AB} - T_{CD}}{T_{AB}}$	0.2	
	Формула (37): $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$	0.2	
2.10	Формула (38): $T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}$	0.2	1.6
	Формула (39): $P(T, V) = C(V)T - \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}$	0.2	
	Формула (40): $P(T, V) _{e \rightarrow 0} = \frac{Nk_B T}{V}$	0.2	
	Формула (41): $P(T, V) = \frac{Nk_B T}{V} - \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0} \frac{N^{4/3}}{V^{4/3}}$	0.2	
	Формула (42): $\beta_1 = k_B T$	0.2	
	Формула (43): $\beta_2 = -\frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0}$	0.2	
	Формула (44): $\beta_3 = \frac{4}{3}$	0.2	
	Численное значение в формуле (45): $P = -2.59 \cdot 10^{16} \text{ Па}$	0.2	
Итого			10.0

Задача 3. Оптический волновод (10.0 баллов)

Описание волн

3.1 Функция

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (1)$$

описывающая волну в фиксированный момент времени $t = t_0$, дает распределение напряженности поля в пространстве. При изменении координаты на длину волны λ аргумент косинуса должен измениться на 2π , поэтому

$$(\omega t_0 - k(x + \lambda) + \varphi) - (\omega t_0 - kx + \varphi) = 2\pi. \quad (2)$$

Из этого соотношения следует, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3)$$

Фиксируя точку пространства $x = x_0$ и рассуждая аналогично, можно записать

$$(\omega(t + T) - kx_0 + \varphi) - (\omega t - kx_0 + \varphi) = 2\pi, \quad (4)$$

откуда следует

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (5)$$

3.2 Скорость распространения монохроматической волны есть скорость движения некоторой волновой поверхности постоянной фазы. Эта поверхность удовлетворяет уравнению

$$\omega t - kx + \varphi = \text{const}. \quad (6)$$

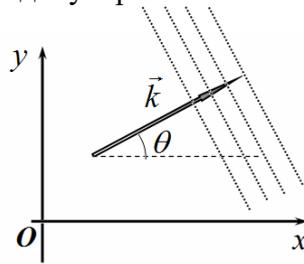
Из этого уравнения следует, что скорость распространения волны равна

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (7)$$

3.3 Поверхность постоянной фазы в фиксированный момент времени удовлетворяет уравнению

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = const, \quad (8)$$

а это есть семейство плоскостей, перпендикулярных волновому вектору \vec{k} .



3.4 Раскрывая скалярное произведение $\vec{k} \cdot \vec{r}$ получим уравнение волны в координатном представлении:

$$E = E'_0 \cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta + \varphi) \quad (9)$$

3.5 Так как для напряженности электрического поля справедлив принцип суперпозиции, то для составной волны можно записать

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) + E_0 \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x) = \\ &= 2E_0 \cos\left(\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Учтем, что $\Delta\omega \ll \omega_0$, а, следовательно, и $\Delta k \ll k_0$, перепишем это выражение в виде:

$$E = A_0(x, t) \cos(\omega_0 t - k_0 x). \quad (11)$$

Здесь введено обозначение

$$A_0(x, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \quad (12)$$

для медленно изменяющейся амплитуды волны.

3.6 Для определения длительности пакета следует учесть, что при переходе от одного «нуля» косинуса до следующего аргумент косинуса изменяется на π . Поэтому

$$\frac{\Delta\omega}{2} \tau = \pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (13)$$

Учитывая, что $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$, из выражения (13) получим соотношение между длительностью пакета и его спектральной шириной

$$\tau\Delta\nu = 1. \quad (14)$$

3.7 Проводя аналогичные рассуждения, не сложно получить, что

$$\frac{\Delta k}{2} L = \pi \Rightarrow L = \frac{2\pi}{\Delta k}. \quad (15)$$

3.8 Фазовая скорость может быть найдена как скорость движения волновой поверхности постоянной фазы. Из функции (11) следует, что эта поверхность удовлетворяет условию

$$(\omega_0 t - k_0 x) = const, \quad (16)$$

из которого следует, что фазовая скорость равна

$$v_p = \frac{\omega_0}{k_0}. \quad (17)$$

3.9 Для определения групповой скорости, запишем условие того, что амплитуда волны, например, максимальна

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = 0. \quad (18)$$

Из этого выражения следует, что групповая скорость задается формулой

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (19)$$

3.10 Для электромагнитных волн в вакууме выполняется соотношение $\lambda\nu = c$, из которого следует

$$\omega = kc, \quad (20)$$

откуда находим

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c, \quad (21)$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c = v_p, \quad (22)$$

то есть, и фазовая и групповая скорости равны скорости света c в вакууме.

Плоский волновод

3.11 Предложенная в условии функция, описывающая поле в плоском волноводе

$$E(t, x, y) = E_0 \cos(\omega t - k_x x) \sin(k_y y) \quad (23)$$

удовлетворяет одному граничному условию: при $y=0$ напряженность поля $E=0$. Поэтому следует выбрать такие значения k_y , чтобы выполнялось второе граничное условие: при $y=a$ напряженность поля также должна обращаться в нуль. Это условие будет выполнено при

$$\sin k_y a = 0 \Rightarrow k_y a = m\pi \Rightarrow k_y = m \frac{\pi}{a}. \quad (24)$$

В этом выражении m – целое положительное число, $m = 1, 2, 3, \dots$

3.12 Запишем уравнения симметричных волн

$$E_1 = E'_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \theta + k_0 y \sin \theta + \varphi), \quad (25)$$

$$E_2 = E'_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \theta - k_0 y \sin \theta - \varphi), \quad (26)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$ – волновое число волн, распространяющихся под углом $\pm \theta$ к плоскостям волновода, и просуммируем их

$$E = E_1 + E_2 = 2E'_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \theta) \cos(k_0 y \sin \theta + \varphi), \quad (27)$$

то есть должно выполняться условие

$$E'_0 = E_0 / 2. \quad (28)$$

Отметим при этом, что должно быть $\varphi = -\pi / 2$.

3.13 Из сравнения полученной формулы (23) и (27) следует, что они будут совпадать, если

$$k_x = k_0 \cos \theta, \quad (29)$$

$$k_y = k_0 \sin \theta. \quad (30)$$

3.14 Приравнивая значения величины k_y , выражаемые формулами (24) и (30), находим

$$k_y = k_0 \sin \theta_m = m \frac{\pi}{a} \Rightarrow \sin \theta_m = m \frac{\pi}{ak_0}. \quad (31)$$

Волновое число рассматриваемых волн в вакууме связано с длиной волны соотношением

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (32)$$

тогда значения возможных углов задаются формулой

$$\sin \theta_m = m \frac{\pi}{ak_0} = m \frac{\lambda}{2a}. \quad (33)$$

3.15 Из уравнения (23) следует, что фазовая скорость распространения волны в волноводе задается формулой

$$v_p = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_0 \cos \theta}. \quad (34)$$

Выразив значение косинуса угла через его синус, который определяется формулой (33), находим

$$v_p = \frac{\omega}{k_0 \cos \theta} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (35)$$

Наконец, используя формулы, связывающие частоты, длины волн и скорость света в вакууме $\frac{\omega}{k_0} = c$, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c$, получим

$$v_p = \frac{\omega}{k_0 \cos \theta} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}. \quad (36)$$

Таким образом, оказывается, что фазовая скорость распространения незатухающей волны в волноводе больше, чем скорость света в вакууме.

3.16 Скорость распространения импульса есть групповая скорость распространения, поэтому она определяется формулой (19), в которой отношение приращений можно заменить производной

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}. \quad (37)$$

Для вычисления скорости по этой формуле необходимо получить в явном виде зависимость волнового числа от частоты $k(\omega)$. Для этого воспользуемся общей формулой для фазовой скорости

$v_p = \frac{\omega}{k}$ и запишем

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{\omega a}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \left(m \frac{\pi c}{a}\right)^2}, \quad (38)$$

после чего скорость распространения импульса вычисляется как

$$v = v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \left(m \frac{\pi c}{a}\right)^2}}\right)^{-1} = c \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}. \quad (39)$$

Как следует из этой формулы, групповая скорость, естественно, меньше скорости света в вакууме. Также, следует указать, что эта скорость равна $c \cos \theta$, что вполне очевидно.

3.17 Обратимся к формуле (33) и подставим в нее заданное отношение $a/\lambda = 1.2$

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{2a} \approx 0,42m. \quad (40)$$

Так как синус любого аргумента не превышает единицы, то из полученного выражения следует, что в данном волноводе могут распространяться только две моды с $m = 1$ и $m = 2$, иными словами, входной импульс будет возбуждать в волноводе два импульса в этих модах. Скорости распространения импульсов в различных модах будут заметно различаться. Прежде всего, выразим эти скорости через заданное отношение a/λ в виде

$$v = c \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{a\omega}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (41)$$

На входе в волновод импульсы в обеих модах возбуждаются одновременно, но так как они движутся с разными скоростями, то по мере возрастания пройденного расстояния они расходятся во времени. Число импульсов удвоится, когда импульсы в разных модах разойдутся на время, превышающее длительность импульса, поэтому искомое расстояние X можно найти из условия

$$\frac{X}{v_2} - \frac{X}{v_1} = \tau, \quad (42)$$

которое приводит к окончательному ответу

$$X = \frac{\tau}{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}} = \frac{c\tau}{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(2\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}} \approx 1,4c\tau. \quad (43)$$

3.18 Для того, чтобы волновод был одномодовым необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sin \theta_2 = 2 \frac{\lambda}{2a} > 1, \quad (44)$$

или

$$\frac{a}{\lambda} < 1. \quad (45)$$

		Содержание	Баллы	
3.1		Формула (2): $(\omega t_0 - k(x + \lambda) + \varphi) - (\omega t_0 - kx + \varphi) = 2\pi$	0.2	0.8
		Формула (3): $k = \frac{2\pi}{\lambda}$	0.2	
		Формула (4): $(\omega(t + T) - kx_0 + \varphi) - (\omega t - kx_0 + \varphi) = 2\pi$	0.2	
		Формула (5): $\omega = \frac{2\pi}{T}$	0.2	
3.2		Формула (6): $\omega t - kx + \varphi = const$	0.2	0.4
		Формула (7): $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$	0.2	
3.3		Плоскости, перпендикулярные волновому вектору.	0.2	0.2
3.4		Формула (9): $E = E'_0 \cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta + \varphi)$	0.2	0.2
3.5		Формула (10): $E = 2E_0 \cos\left(\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$	0.2	0.4
		Формула (12): $A_0(x, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$	0.2	
3.6		Формула (13): $\frac{\Delta\omega}{2}\tau = \pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$	0.2	0.4
		Формула (14): $\tau\Delta v = 1$	0.2	
3.7		Формула (15): $\frac{\Delta k}{2}L = \pi \Rightarrow L = \frac{2\pi}{\Delta k}$	0.2	0.2
3.8		Формула (16): $(\omega_0 t - k_0 x) = const$	0.2	0.4
		Формула (17): $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$	0.2	
3.9		Формула (18): $\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = 0$	0.2	0.4
		Формула (19): $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$	0.2	
3.10		Формула (20): $\omega = kc$	0.2	0.6
		Формула (21): $v_p = \frac{\omega}{k} = c$	0.2	
		Формула (22): $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = c = v_p$	0.2	

3.11	Формула (24): $k_y = m \frac{\pi}{a}$	0.2	0.2
3.12	Формула (25): $E_1 = E'_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \theta + k_0 y \sin \theta + \varphi)$	0.2	0.8
	Формула (26): $E_2 = E'_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \theta - k_0 y \sin \theta - \varphi)$	0.2	
	Формула (28): $E'_0 = E_0 / 2$	0.2	
	Условие: $\varphi = -\pi / 2$	0.2	
3.13	Формула (29): $k_x = k_0 \cos \theta$	0.2	0.4
	Формула (30): $k_y = k_0 \sin \theta$	0.2	
3.14	Формула (31): $k_y = k_0 \sin \theta_m = m \frac{\pi}{a} \Rightarrow \sin \theta_m = m \frac{\pi}{a k_0}$	0.3	0.6
	Формула (33): $\sin \theta_m = m \frac{\pi}{a k_0} = m \frac{\lambda}{2a}$	0.3	
3.15	Формула (34): $v_p = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_0 \cos \theta}$	0.3	0.6
	Формула (36): $v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$	0.3	
3.16	Формула (37): $v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}$	0.3	1.0
	Формула (38): $k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{\omega a}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \left(m \frac{\pi c}{a}\right)^2}$	0.4	
	Формула (39): $v_g = c \sqrt{1 - \left(m \frac{\pi c}{a \omega}\right)^2}$	0.3	
3.17	Формула (40): $\sin \theta_m \approx 0,42m$	0.2	1.8
	Присутствуют моды с $m = 1$ и $m = 2$	0.4	
	Формула (41): $v = c \sqrt{1 - \left(m \frac{\lambda}{2a}\right)^2}$	0.4	
	Формула (42): $\frac{X}{v_2} - \frac{X}{v_1} = \tau$	0.4	
	Формула (43): $X \approx 1,4c\tau$	0.4	
3.18	Формула (44): $\sin \theta_2 = 2 \frac{\lambda}{2a} > 1$	0.3	0.6
	Формула (45): $\frac{a}{\lambda} < 1$	0.3	
Итого			10.0