XVI Международная Жаутыковская олимпиада по математике.
Решения задач 2 тура

№4. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, а CN – биссектриса. Прямая CN вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M. Прямая ℓ параллельна прямой AB и касается вписанной окружности треугольника ABC. Точка R на прямой ℓ такова, что $CI \perp IR$. Описанная окружность треугольника MNR вторично пересекает прямую IR в точке S. Докажите, что $AS = BS$.

Решение. Напомним, что ориентированным углом между прямыми n и m называется такой угол, на который нужно против часовой стрелки повернуть прямую n, чтобы она стала параллельна прямой m. Обозначается ориентированный угол через $\angle(n, m)$.

Проведем из точки N касательную прямую d, отличную от AB, ко вписанной окружности $\triangle ABC$. Тогда $\angle(\ell, CI) = \angle(NB, NI) = \angle(NI, d)$. Так как $CI \perp IR$, то в силу симметрии относительно прямой IR, прямая d проходит через точку R.

Пусть прямые MS и ℓ пересекаются в точке T. Тогда $\angle(MN, MS) = \angle(RN, RS) = \angle(RS, RT)$, то есть точки R, T, I, M лежат на одной окружности. Поэтому из $\angle(RI, MI) = 90°$, следует $\angle(RT, MT) = 90°$. Значит, $MS \perp AB$. Но, так как M лежит на серединном перпендикуляре отрезка AB, то и S также лежит на нем. Следовательно $AS = BS$.

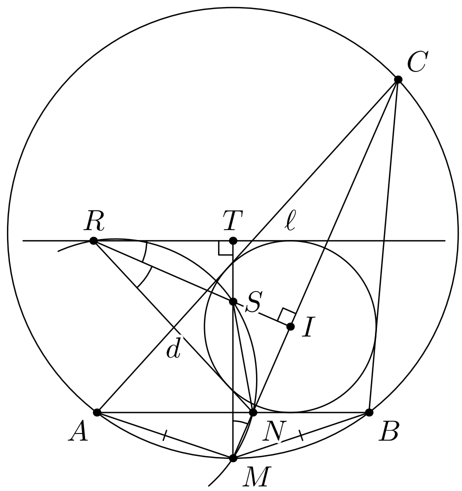

Рис. 1

№5. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию $f(4x+3y) = f(3x+y)+f(x+2y)$ при всех целых x и y.

Ответ: $f(x) = \frac{ax}{5}$ при x, кратном 5, и $f(x) = bx$ при x, не кратном 5, где a и b – произвольные целые числа.

Решение. Подставляя $x = 0$ в исходное уравнение

$$f(4x + 3y) = f(3x + y) + f(x + 2y) \qquad (1),$$

получаем

$$f(3y) = f(y) + f(2y). \qquad (2)$$

Далее, при $y = -2x$ (1) принимает вид $f(-2x) = f(x) + f(-3x) = f(x) + f(-x) + f(-2x)$ (в силу (2)). Таким образом,

$$f(-x) = -f(x). \qquad (3)$$

Теперь положим $x = 2z - v$, $y = 3v - z$ в (1). Получим

$$f(5z + 5v) = f(5z) + f(5v) \qquad (4)$$

при всех $z, v \in \mathbb{Z}$. Отсюда сразу следует, что $f(5t) = tf(5)$ при $t \in \mathbb{Z}$, или $f(x) = \frac{ax}{5}$ при всех x, кратных 5, где $f(5) = a$.

Докажем, что

$$f(x) = bx, \qquad (5)$$

где $b = f(1)$, при всех x, не кратных 5. В силу (3) достаточно доказать это для $x > 0$. Мы применим индукцию по k, где $x = 5k + r$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 < r < 5$. Для $x = 1$ (5) очевидно. Подставляя в условие $x = 1$, $y = -1$, находим $f(1) = f(2) + f(-1)$, откуда $f(2) = f(1) - f(-1) = 2f(1) = 2b$. Далее, $f(3) = f(1) + f(2) = 3b$ в силу (2). Наконец, при $x = 1$, $y = 0$ уравнение (1) даёт $f(4) = f(3) + f(1) = 3b + b = 4b$. База индукции проверена.

Предположим, что (5) верно при $x < 5k$. Имеем $f(5k + 1) = f(4(2k - 2) + 3(3 - k)) = f(3(2k - 2) + (3 - k)) + f((2k - 2) + 2(3 - k)) = f(5k - 3) + f(4) = (5k - 3)b + 4b = (5k + 1)b$; $f(5k + 2) = f(4(2k - 1) + 3(2 - k)) = f(3(2k - 1) + (2 - k)) + f((2k - 1) + 2(2 - k)) = f(5k - 1) + f(3) = (5k - 1)b + 3b = (5k + 2)b$; $f(5k+3) = f(4\cdot 2k+3(1-k)) = f(3\cdot 2k+(1-k))+f(2k+2(1-k)) = f(5k+1)+f(2) = (5k+1)b+2b = (5k+3)b$; $f(5k + 4) = f(4(2k + 1) + 3(-k)) = f(3(2k + 1) + (-k)) + f((2k + 1) + 2(-k)) = f(5k + 3) + f(1) = (5k + 3)b + b = (5k + 4)b$. Таким образом, (5) доказано.

Остаётся проверить, что функция $f(x) = \frac{ax}{5}$ при x, кратных 5, $f(x) = bx$ при x, не кратных 5, удовлетворяет тождеству (1). Для этого достаточно заметить, что либо все числа $4x+3y$, $3x+y$, $x+2y$ кратны 5, либо ни одно из них не кратно 5 (поскольку $3x+y = 5(x+y) - 2(x+2y) = 2(4x+3y) - 5(x+y)$).

№6. На доске $n \times n$ ($n > 2$) некоторые клетки чёрные, а остальные белые. В каждой белой клетке записано количество чёрных клеток, имеющих с ней хотя бы одну общую вершину. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех записанных чисел.

Ответ: $3n^2 - 5n + 2$.

Решение. Такая сумма получается, если закрасить в чёрный цвет все строки с чётными номерами. Докажем, что она максимальна.

Очевидно, что указанная в условии сумма равна количеству пар клеток с общей вершиной, в которых одна клетка черная, а другая белая. Заметим, что пары таких клеток бывают двух типов: граничащие по стороне и не граничащие. Посчитаем количество пар обоих типов другим способом.

Напишем во всех *узлах* доски нули, а затем для каждой пары второго типа прибавим 1 к числу в узле, по которому граничат клетки этой пары (такой узел ровно один). Для каждой пары первого типа прибавим по $\frac{1}{2}$ в каждый из двух узлов, по которым граничат клетки этой пары. Таким образом, для каждой пары мы прибавили 1 к сумме всех чисел в узлах, значит, после всех операций сумма чисел в узлах равна числу искомых пар клеток.

Разберемся, какие числа могут стоять в узлах. Несложный перебор показывает, что:

(i) во внутреннем узле доски стоит число 3 тогда и только тогда, когда там сходятся две соседние по стороне черные клетки и две соседние белые;

(ii) во всех остальных внутренних узлах числа не больше 2;

(iii) в граничном узле стоит $\frac{1}{2}$, если содержащие его клетки разного цвета, и 0 в противном случае;

(iv) в углу всегда стоит 0.

Замечание: здесь уже доказано, что рассматриваемая сумма не превосходит $3 \times (n-1)^2 + \frac{1}{2}(4n-4) = 3n^2 - 4n + 1$. Даже если вам не удалось доказать ничего больше – такие оценки стоит писать. Обозначим $S = 3n^2 - 4n + 1$.

Докажем, что числа во всех узлах не могут быть максимальными одновременно. Точнее, докажем следующее.

Определение. Число в узле *максимально*, если узел внутренний и число равно 3, либо узел граничный и число равно $\frac{1}{2}$.

Определение. *Путь* – это последовательность узлов, в которой любые два стоящих подряд узла отстоят друг от друга на сторону клетки.

Лемма. При любой покраске доски на любом пути из узла на горизонтальной стороне доски в узел на вертикальной стороне доски, не проходящем через угловые клетки, есть число, не являющееся максимальным.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, если выбрать цвет одной из клеток, содержащей узел на вертикальной стороне, раскраска остальных клеток, примыкающих к пути (клетки содержащие узлы пути), определена однозначно, но в узле на горизонтальной стороне стоит 0.

Докажем, что сумма чисел в любой раскраске не превосходит суммы максимальных чисел, уменьшенной на четверть числа узлов, лежащих на сторонах (но не в вершинах доски). Рассмотрим всевозможные квадраты с вершиной в левом нижнем углу доски. Правая и верхняя стороны такого квадрата образуют путь, удовлетворяющий условию леммы. Такой же набор путей порождают квадраты с вершиной в правом верхнем углу доски. Каждый узел на стороне покрыт ровно одним из полученных $2n-2$ путей, а каждый внутренний узел – двумя.

Рассмотрим произвольную покраску доски. В соответствующем ей наборе чисел в узлах на каждом пути есть число, меньше максимального (по Лемме). Если это число на стороне, оно меньше максимального на $\frac{1}{2}$ и не входит больше ни в какой путь. Если это число во внутреннем узле, оно входит максимум в два пути и меньше максимального хотя бы на 1. Таким образом, вклад каждого пути в сумму меньше максимального хотя бы на $\frac{1}{2}$, ч. и т.д.

Интересный вопрос: позволяют ли приведенные выше соображения подсчитать число раскрасок с наибольшей суммой?