Математикадан халықаралық XVI Жәутіков олимпиадасы
Алматы, 2020
11 қаңтар 2020 жыл, 9.00-13.30
Екінші күн
(Әр есеп 7 ұпайға бағаланады)

№4. Теңбүйірлі емес ABC үшбұрышында I — іштей сызылған шеңбердің центрі, ал CN – биссектриса. CN түзуі ABC-ға сырттай сызылған шеңберді екінші рет M нүктесінде қияды. AB түзуіне параллель ℓ түзуі ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңберді жанайды. $CI \perp IR$ болатындай ℓ бойынан R нүктесі алынған. MNR үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер IR түзуін екінші рет S нүктесінде қияды. $AS = BS$ екенін дәлелдеңіз.

№5. $\mathbb{Z}$ – бүтін сандар жиыны. Кез келген бүтін x, y үшін $f(4x+3y) = f(3x+y) + f(x+2y)$ теңдігін қанағаттандыратын барлық $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ функцияларын табыңыз.

№6. Өлшемі $n \times n$ $(n > 2)$ тақтаның кейбір шаршылары қара, қалғандары ақ түске боялған. Әрбір ақ шаршыға сол шаршымен ортақ төбесі бар қара шаршылардың саны жазылған. Осылайша жазылған сандардың қосындысының ең үлкен мүмкін мәнін табыңыз.

XVI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2020
11 января 2020 года, 9.00-13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

№4. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, а CN – биссектриса. Прямая CN вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке M. Прямая ℓ параллельна прямой AB и касается вписанной окружности треугольника ABC. Точка R на прямой ℓ такова, что $CI \perp IR$. Описанная окружность треугольника MNR вторично пересекает прямую IR в точке S. Докажите, что $AS = BS$.

№5. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию

$$f(4x+3y) = f(3x+y) + f(x+2y)$$

при всех целых x и y.

№6. На доске $n \times n$ $(n > 2)$ некоторые клетки чёрные, а остальные белые. В каждой белой клетке записано количество чёрных клеток, имеющих с ней хотя бы одну общую вершину. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех записанных чисел.

XVI International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2020
January 11, 9.00-13.30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

№4. In a scalene triangle ABC I is the incenter and CN is the bisector of angle C. The line CN meets the circumcircle of ABC again at M. The line ℓ is parallel to AB and touches the incircle of ABC. The point R on ℓ is such that $CI \perp IR$. The circumcircle of MNR meets the line IR again at S. Prove that $AS = BS$.

№5. Let $\mathbb{Z}$ be the set of all integers. Find all the functions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that

$$f(4x+3y) = f(3x+y) + f(x+2y)$$

for all integers x and y.

№6. Some squares of a $n \times n$ table $(n > 2)$ are black, the rest are white. In every white square we wrtie the number of all the black squares having at least one common vertex with it. Find the maximum possible sum of all these numbers.