XVI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2020

10 января 2020 года, 9.00-13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Натуральное число n таково, что ни при каких натуральных a и b число $2^a 3^b + 1$ не делится на n. Докажите, что $2^c + 3^d$ также не делится на n ни при каких натуральных c и d.

Решение. Предположим противное: $2^c + 3^d$ кратно n. Очевидно, n не кратно 3. Тогда $3^k - 1$ делится на n для некоторого k. Выбрав s так, что $ks > d$, мы получим, что $3^{ks-d}(2^c + 3^d) = 2^c 3^{ks-d} + 3^{ks}$ кратно n. Следовательно, число $2^c 3^{ks-d} + 1 = 2^c 3^{ks-d} + 3^{ks} - (3^{ks} - 1)$ также кратно n – противоречие.

2. В множестве из 20 элементов выбраны $2k+1$ различных семиэлементных подмножеств, каждое из которых пересекается ровно с k другими выбранными подмножествами. При каком наибольшем k это возможно?

Ответ: при $k = 2$.

Решение. Пусть M – множество вычетов $\operatorname{mod} 20$. Пример для $k = 2$ доставляют пять подмножеств $A_i = \{4i+1, 4i+2, 4i+3, 4i+4, 4i+5, 4i+6, 4i+7\} \subset M$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Пусть $k \geqslant 2$. Очевидно, среди любых трёх семиэлементных подмножеств есть два пересекающихся.

Выберем произвольное подмножество A. Оно пересекается с k множествами $B_1, \ldots, B_k$. Остальные подмножества $C_1, \ldots, C_k$ не пересекаются с A и поэтому попарно пересекаются друг с другом. Так как каждое C_i должно пересекаться с k подмножествами, оно пересекается ровно с одним из подмножеств B_j. Все C_i не могут пересекаться с одним и тем же B_j, так как тогда это B_j пересекалось бы с $k+1$ множеством.

Таким образом, найдутся два разных C_i, которые пересекаются с разными B_j; примем, что C_1 пересекается с B_1, а C_2 пересекается с B_2. Все множества, которые не пересекаются с C_1, попарно пересекаются друг с другом. Среди этих множеств есть A; следовательно, это A и все B_i с $i \neq 1$. Отсюда следует, что два множества B_i, среди которых нет B_1, всегда пересекаются. Аналогично рассмотрением C_2 получим, что два множества B_i, среди которых нет B_2, всегда пересекаются. Таким образом, в семействе A, B_1, $\ldots$, B_k есть только одна пара непересекающихся подмножеств B_1 и B_2, причём B_1 пересекается с C_1, а B_2 с C_2. В этом списке для каждого B_i есть k пересекающихся с ним подмножеств. Отсюда следует, что C_i при $i > 2$ не может пересекаться ни с одним B_j, а, значит, таких C_i нет, то есть $k \leqslant 2$.

3. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите неравенство

$$AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot AE \cdot BF \geqslant 27 AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FA.$$

Решение. Положим

$$d_1 = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FA, d_2 = AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot AE \cdot BF, d_3 = AD \cdot BE \cdot CF.$$

Применяя теорему Птолемея к четырёхугольникам $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFA$, $EFAB$, $FABC$, получим шесть равенств $AC \cdot BD - AB \cdot CD = BC \cdot AD$, $\ldots$, $FB \cdot AC - FA \cdot BC = AB \cdot FC$. Подставляя эти равенства в известное неравенство

$$\sqrt[6]{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_6 - b_6)} \leqslant \sqrt[6]{a_1 a_2 \ldots a_6} - \sqrt[6]{b_1 b_2 \ldots b_6} \quad (a_i \geqslant b_i > 0, i = 1, \ldots, 6),$$

получим

$$\sqrt[3]{d_3}\sqrt[6]{d_1} \leqslant \sqrt[3]{d_2} - \sqrt[3]{d_1}. \tag{1}$$

Применяя теорему Птолемея к четырёхугольникам $ACDF$, $ABDE$ и $BCEF$, получим три равенства $AD \cdot CF = AC \cdot DF + AF \cdot CD$, $AD \cdot BE = BD \cdot AE + AB \cdot DE$, $BE \cdot CF = BF \cdot CE + BC \cdot EF$. Подставляя эти равенства в известное неравенство

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geqslant \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} \quad (a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, 3),$$

получим

$$\sqrt[3]{d_3^2} \geqslant \sqrt[3]{d_2} + \sqrt[3]{d_1}. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $(\sqrt[3]{d_2} - \sqrt[3]{d_1})^2 \geqslant \sqrt[3]{d_1}(\sqrt[3]{d_2} + \sqrt[3]{d_1})$, то есть $\sqrt[3]{d_2} \geqslant 3\sqrt[3]{d_1}$ и $d_2 \geqslant 27 d_1$, ч. и т.д.