

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10 января 2020 года

**Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:**

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
  - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*.
  - Черновые листы.
  - Неиспользованные листы.
  - Отпечатанные условия задачи.

Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

**Задача 1 (10,0 балла)**

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

**Задача 1.1 (4,0 балла)**

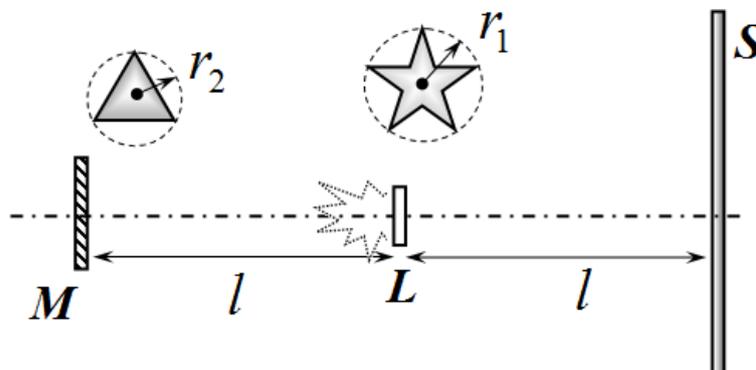
Математический маятник находится на экваторе Земли. Обозначим период его колебаний в полдень  $T_1$ , а в полночь –  $T_2$ . Найдите относительную разность этих периодов  $\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ . Используйте следующие приближения и численные значения: Земля является идеальным шаром радиуса  $r_1 = 6,4 \cdot 10^3$  км; орбита Земли является окружностью радиуса  $r_2 = 1,5 \cdot 10^8$  км с центром, находящимся в центре Солнца; ось вращения Земли перпендикулярна плоскости земной орбиты; влиянием Луны и планет пренебречь; ускорение свободного падения на полюсе Земли  $g_0 = 9,8$  м/с<sup>2</sup>; период обращения Земли вокруг своей оси составляет 1 сутки; период обращения Земли вокруг Солнца равен 1 году.

**Задача 1.2 (3,0 балла)**

Пространство между двумя концентрическими хорошо проводящими сферами радиусами  $a$  и  $b > a$  заполнено веществом, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния до их общего центра. Между сферами протекает электрический ток силой  $I$ , так что объемная плотность джоулевых потерь в веществе одинакова во всех его точках и равна  $w$ . Определите среднюю плотность объемного заряда  $\rho_Q$ , накопившегося в объеме вещества за достаточно большое время протекания электрического тока.

**Задача 1.3 (3,0 балла)**

Между экраном  $S$  и плоским зеркалом  $M$  на равных расстояниях  $l = 50$  см от них расположен плоский матовый источник  $L$ , испускающий белый свет только в сторону зеркала. Плоскости экрана, зеркала и источника параллельны друг другу. Источник имеет форму пятиконечной звезды, вписанной в окружность радиуса  $r_1$ , а зеркало – правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса  $r_2$ . Центры источника и зеркала находятся на оси, перпендикулярной плоскости экрана. Схематически нарисуйте изображение источника на экране, соблюдая его ориентацию в соответствии с рисунком ниже. Оцените размеры всех элементов изображения.



Задачу решите только для двух случаев:

1.3.1  $r_1 = 1,0$  мм и  $r_2 = 10$  мм;

1.3.2  $r_1 = 10$  мм и  $r_2 = 0,1$  мм.

**Задача 2. Фазы и фазовые переходы (10,0 баллов)**

При заданном давлении переход из одного агрегатного состояния вещества (фазы) в другое происходит всегда при строго определённой температуре, при этом сам переход называется фазовым. Например, лёд при атмосферном давлении плавиться при  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , так что при подводе тепла температура смеси из льда и воды остается неизменной вплоть до того момента, пока весь лёд не превратится в воду.

Во всех предлагаемых ниже задачах считайте, что удельный объём жидкой фазы пренебрежимо мал по сравнению с удельным объёмом насыщенного пара, который можно считать идеальным газом. Теплоёмкость жидкой воды считайте независимой от температуры.

*Справочные данные*

Газовая постоянная  $R = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$ ;  
молярная масса воздуха  $\mu_{air} = 29,0\text{ г}/\text{моль}$ ;  
ускорение свободного падения  $g = 9,81\text{ м}/\text{с}^2$ .

Нормальные условия:

давление  $P_0 = 1\text{ атм} = 760\text{ мм. рт. ст.} = 101325\text{ Па}$ ,  
температура  $T_0 = 273,15\text{ К} = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Свойства воды ( $\text{H}_2\text{O}$ )*

Молярная масса  $\mu_w = 18,0\text{ г}/\text{моль}$ ;  
плотность воды  $\rho_w = 1,00\text{ г}/\text{см}^3$ ;  
плотность льда  $\rho_i = 0,920\text{ г}/\text{см}^3$ ;  
температура плавления льда при нормальном давлении  $t_m = 0,00\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  
температура кипения воды при нормальном давлении  $t_b = 100,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  
удельная теплоёмкость воды  $c_w = 4,20\text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{K})$ ;  
удельная теплота плавления льда  $q_i = 334\text{ Дж}/\text{г}$ ;  
удельная теплота парообразования воды (при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ )  $r_w = 2259\text{ Дж}/\text{г}$ ;  
показатель адиабаты Пуассона для водяных паров  $\gamma = C_p/C_v = 4/3$ .

**Теплота фазового перехода**

Если переход вещества из одной фазы в другую связан с выделением или поглощением некоторого количества теплоты, называемой теплотой перехода, то такой переход называется фазовым переходом первого рода. При этом теплота перехода  $q$  для единичной массы называется удельной теплотой фазового перехода (плавления, испарения, возгонки).

Поскольку фазовый переход происходит при постоянном давлении, то по первому началу термодинамики теплота  $q$  расходуется на изменение внутренней энергии  $u$  и на работу  $A$  против постоянного внешнего давления:

$$q = u_2 - u_1 + A,$$

где  $u_1, u_2$  – удельные внутренние энергии соответственно первой и второй фаз соответственно.

При плавлении (кристаллизации) из-за малого различия плотностей жидкой и твёрдой фаз изменение объёма в результате фазового перехода невелико, поэтому работой  $A$  можно пренебречь по сравнению с изменением внутренней энергии.

**2.1** Рассчитайте, какая часть теплоты испарения воды при  $t_b = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$  расходуется на изменение внутренней энергии. Ответ выразите в %.

**2.2** Вычислите удельную теплоту парообразования воды при комнатной температуре  $t = 20,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

В дальнейшем удельную теплоту испарения всех жидкостей считайте не зависящими от температуры.

**Формула Клапейрона – Клаузиуса**

При изменении давления температура фазового перехода первого рода меняется, то есть фазовый переход имеет место при строго определённой зависимости  $P(T)$  между давлением  $P$  и температурой  $T$  вещества. Эта зависимость, изображённая на координатной  $(T, P)$ -плоскости, называется фазовой  $T - P$  диаграммой, а сама линия  $P(T)$  – линией фазового равновесия. Формула Клапейрона-Клаузиуса дает наклон линии фазового равновесия  $P(T)$  в виде:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}$$

где  $q$  – удельная теплота перехода из фазы 1 с удельным объёмом  $v_1$  в фазу 2 с удельным объёмом  $v_2$ .

**2.3** Считая известным давление насыщенного пара воды при температуре  $t_b = 100$  °С, получите явную зависимость давления насыщенных паров воды от температуры  $P(T)$ .

**2.4** Вычислите температуру кипения воды на самой высокой вершине Казахстана – пике Хан-Тенгри. Высота пика Хан-Тенгри над уровнем моря  $h \approx 7000$  м. Температуру воздуха по высоте считать постоянной и равной  $t_0 = 0$  °С.

**2.5** При каком давлении (в атмосферах) лёд будет плавиться при температуре  $t = -1,00$  °С?

**2.6** Известно, что кристаллики льда начинают разрушаться, если вдоль какого-либо направления кристалла приложить силу, создающее давление  $P > P_{cr} \sim 1000$  атм. Поэтому снег в морозную погоду «хрустит» при ходьбе. Оцените максимальную температуру воздуха  $t_{max}$ , при которой снег все еще «хрустит» при ходьбе.

**2.7** В сосуде находится один моль насыщенного водяного пара при температуре  $t_b = 100$  °С. Пар нагревается и одновременно меняется его объём так, что он все время остаётся насыщенным. Найдите молярную теплоёмкость пара в таком процессе.

### Пограничное кипение

Пограничное кипение – это кипение на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей. Температура пограничного кипения может существенно отличаться от температур объёмного кипения каждой из жидкостей.

Тетрахлорметан или четырёххлористый водород представляет собой тяжёлую (плотность  $\rho = 1,60$  г/см<sup>3</sup>) прозрачную жидкость с молярной массой  $\mu = 153,8$  г/моль. При нормальном атмосферном давлении тетрахлорметан кипит при температуре  $t = 76,65$  °С, при этом он практически не растворяется в воде. Сосуд объёмом  $V = 100$  мл наполовину наполняют тетрахлорметаном, а поверх заливают такое же (по объёму) количество воды. При этом образуется четкая граница вода-тетрахлорметан. При равномерном нагревании сосуда на водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре  $t^* = 66,0$  °С, что значительно ниже температуры объёмного кипения каждой из компонент в отдельности.

**2.8** Рассчитайте по этим данным удельную теплоту  $r$  испарения тетрахлорметана, если известно, что давление насыщенных паров воды при температуре пограничного кипения  $P_w(t^*) = 196$  мм. рт. ст.

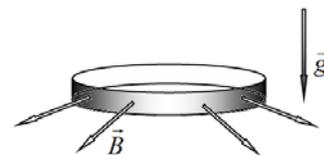
**2.9** Найдите массу остающейся в сосуде жидкости к моменту полного выкипания другой жидкости при таком пограничном кипении.

Рассмотрим ещё одну пару несмешивающихся жидкостей, воду и фторкетон. Жидкость фторкетон, иногда называемая «сухой водой», используется при тушении пожаров в библиотеках, музеях, офисах, поскольку не смачивает бумагу. Это тяжелая (плотность  $\rho = 1,72$  г/см<sup>3</sup>) прозрачная жидкость с молярной массой  $\mu = 316$  г/моль, которая в воде практически не растворяется. Температура кипения фторкетона при атмосферном давлении  $t_f = 49,2$  °С, удельная теплота парообразования  $r = 95,0$  Дж/г. Если поверх фторкетона в сосуд налить воду, то также образуется четкая граница вода-фторкетон.

**2.10** Оцените температуру  $t_x$  закипания жидкостей на границе вода-фторкетон, если известно давление насыщенных паров воды при температуре объёмного кипения фторкетона  $P_w(t_f) = 89,0$  мм. рт. ст.

**Задача 3. Кольцо в магнитном поле (10,0 балла)****Равномерно заряженное кольцо**

Очень тонкое кольцо массы  $m$  и радиуса  $r$  равномерно заряжено по своей длине зарядом  $q$ . В начальный момент времени кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения  $g$ , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией  $B$ . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.



- 3.1** Найдите максимальную скорость центра масс кольца  $v_{max}$  за все время движения.  
**3.2** Найдите интервал времени  $\Delta t$ , прошедший от начала движения до момента первого достижения максимальной скорости центром масс кольца.  
**3.3** Найдите максимальную высоту  $h_{max}$ , на которую опустится центр масс кольца за все время движения.

**Проводящее кольцо**

Очень тонкое кольцо массы  $m$  и радиуса  $r$  изготовлено из проводящего материала с удельным сопротивлением  $\rho$  и поперечным сечением  $s \ll r^2$ . В начальный момент времени  $t = 0$  кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения  $g$ , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией  $B$ . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.

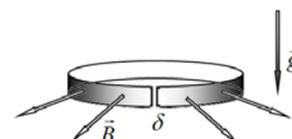
- 3.4** Найдите установившуюся скорость центра масс кольца  $v_0$  через достаточно большой промежуток времени.  
**3.5** Зависимость силы тока в кольце  $I(t)$  от времени  $t$  имеет вид

$$I(t) = A_1 + B_1 \exp(\gamma_1 t).$$

Определите постоянные  $A_1, B_1$  и  $\gamma_1$ .

**Разрезанное проводящее кольцо**

Очень тонкое кольцо массы  $m$  и радиуса  $r$  изготовлено из проводящего материала с удельным сопротивлением  $\rho$  и поперечным сечением  $s$ . Вдоль радиуса кольца сделан разрез шириной  $\delta \ll \sqrt{s} \ll r$ . В начальный момент времени  $t = 0$  кольцо покоится горизонтально и освобождается без толчка. Последующее движение кольца происходит в вертикальном поле тяжести Земли, характеризуемом ускорением свободного падения  $g$ , и в горизонтальном радиальном магнитном поле индукцией  $B$ . Соппротивлением воздуха пренебречь. Считайте, что плоскость кольца все время остается горизонтальной.



- 3.6** Найдите установившееся ускорение центра масс кольца  $a_0$  через достаточно большой промежуток времени.  
**3.7** Зависимость силы тока в кольце  $I(t)$  от времени  $t$  имеет вид

$$I(t) = A_2 + B_2 \exp(\gamma_2 t).$$

Определите постоянные  $A_2, B_2$  и  $\gamma_2$ .

**Математическая подсказка для задач теоретического тура**

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b|.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ где } n - \text{целое число}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ для } x \ll 1 \text{ и любых } \gamma$$