XV Международная Жаутыковская олимпиада по математике

Решения задач второго дня

№4. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC$. На стороне AC выбрана точка D. Окружность S_1 с радиусом R и центром O_1 касается отрезка AD и продолжений BA и BD за точки A и D соответственно. Окружность S_2 с радиусом $2R$ и центром O_2 касается отрезка DC и продолжений BD и BC за точки D и C соответственно. Пусть касательная к описанной окружности треугольника BO_1O_2 в точке O_2 пересекает прямую BA в точке F. Докажите, что $O_1F = O_1O_2$.

Первое решение. По условию в треугольнике ABC мы имеем $\angle A = \angle B$. Очевидно, что $\angle O_1BO_2 = \angle B/2$. Пусть ℓ — прямая, проходящая через O_2 параллельно AC. По условию задачи ℓ касается S_1 (скажем, в точке N). Пусть также K — точка касания S_1 и BA. Тогда при повороте по часовой стрелке вокруг точки O_1 на угол NO_1K прямая ℓ перейдет в прямую BA, а точка O_2 — в некоторую точку $O \in BA$. Поэтому $O_1O = O_1O_2$ и $\angle OO_1O_2 = \angle NO_1K = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle B$, следовательно, $\angle O_1O_2O = \angle B/2 = \angle O_1BO_2$. Последнее означает, что прямая O_2O — касательная к описанной окружности $\triangle BO_1O_2$. Следовательно, $F = O$ и $O_1F = O_1O_2$ что и требовалось доказать.

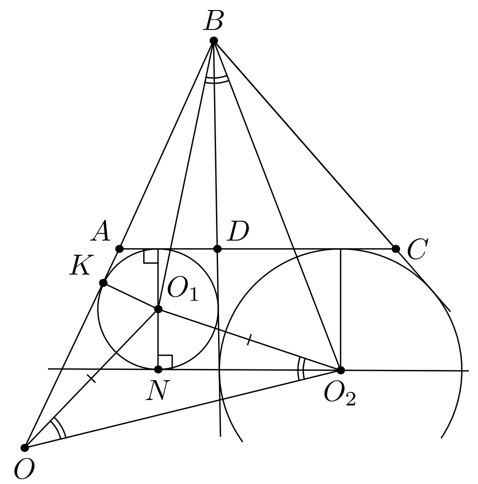

Рис. 1

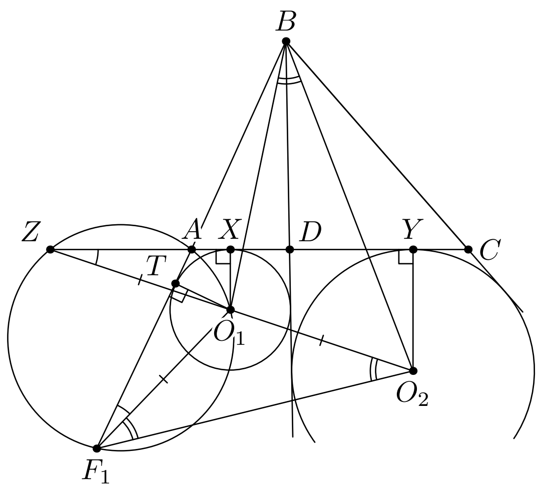

Рис. 2

Второе решение. Пусть ω_1 и ω_2 касаются отрезка AC в точках X и Y соответственно, а O_1O_2 пересекает AC в точке Z. Из условия задачи следует, что O_1X — средняя линия треугольника O_2YZ. Поэтому $O_1O_2 = O_1Z$. Пусть T — точка касания ω_1 и прямой AB. Отметим на луче AT точку F_1 такую, что $O_1F_1 = O_1O_2$. Тогда прямоугольные треугольники O_1XZ и O_1TF_1 равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle XZO_1 = \angle TF_1O_1$, или $\angle AZO_1 = \angle AF_1O_1$. Значит, AZF_1O_1 — вписанный четырехугольник. Очевидно, что $\angle O_1BO_2 = \angle ABC/2$. Поэтому $\angle O_1O_2F_1 = \angle ZO_1F_1/2 = \angle ZAF_1/2 = \angle BAC/2 = \angle ABC/2 = \angle O_1BO_2$, то есть описанная окружность треугольника O_1O_2B касается прямой O_2F_1. Значит, точки F_1 и F совпадают, а отрезки O_1O_2 и O_1F_1 равны по построению F_1.

№5. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Дана функция $f : I \to \mathbb{Z}$, где I — множество всех целых чисел, взаимно простых с n. ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел). Натуральное число k называется *периодом* функции f если $f(a) = f(b)$ для любых $a, b \in I$ таких, что $a \equiv b \pmod k$. Известно, что n является периодом функции f. Докажите, что минимальный период функции f делит все ее периоды.

Пример. Когда $n = 6$, функция f с периодом 6 полностью определяется своими значениями $f(1)$ и $f(5)$. Если $f(1) = f(5)$, то функция имеет минимальный период $P_{\min} = 1$, а если $f(1) \neq f(5)$, то $P_{\min} = 3$.

№6. С многочленом третьей степени разрешается неограниченное число раз проделывать следующие две операции:

(i) переставлять его коэффициенты, включая нулевые, в обратном порядке (так, из многочлена x^3-2x^2-3 можно получить многочлен $-3x^3-2x+1$);

(ii) заменять многочлен $P(x)$ на многочлен $P(x+1)$.

Можно ли получить из многочлена x^3-2 многочлен x^3-3x^2+3x-3?

Ответ: нет.

Решение I. Исходный многочлен x^3-2 имеет единственный вещественный корень. Очевидно, разрешённые преобразования сохраняют это свойство многочлена. Если α – единственный вещественный корень многочлена $P(x)$, то первая операция даёт многочлен с корнем $\frac{1}{\alpha}$, а вторая – с корнем $\alpha-1$. Поскольку корень исходного многочлена $\sqrt[3]{2}$, а корень итогового равен $1+\sqrt[3]{2}$, вопрос задачи сводится к тому, можно ли получить из первого числа второе операциями $x\mapsto\frac{1}{x}$ и $x\mapsto x-1$. Добавим ещё одну операцию $x\mapsto x-1$ (так, чтобы число $\sqrt[3]{2}$ переходило в себя) и обратим все операции. Тогда окажется, что число $\sqrt[3]{2}$ переходит в себя после нескольких операций вида $x\mapsto\frac{1}{x}$ и $x\mapsto x+1$. Легко видеть, что композиция любого количества таких операций – дробно-линейная функция $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d – целые неотрицательные числа и $ad-bc=1$. Каждая операция $x\mapsto x+1$ увеличивает сумму $a+b+c+d$, и, поскольку эта операция была применена хотя бы один раз (в начале), композиция всех примененных операций не является тождественным преобразованием. Таким образом, $\sqrt[3]{2}$ переходит в себя при каком-то преобразовании такого вида. Это, однако, означает, что $\sqrt[3]{2}$ является корнем ненулевого многочлена $x(cx+d)-ax-b$ степени не выше 2 с целыми коэффициентами, что невозможно.

Решение II. У исходного многочлена есть один вещественный корень и два сопряженных комплексных. Как мы видели в первом решении, при описанных операциях эти корни подвергаются преобразованиям вида $x\mapsto\frac{1}{x}$ и $x\mapsto x-1$. Заметим, что оба мнимых корня исходного многочлена имеют отрицательную вещественную часть. Несложно проверить, что это свойство сохраняется при разрешённых операциях. Однако вещественные части корней многочлена, который требуется получить, положительны – противоречие.

Решение III. Сопоставим многочлену $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ величину $\Delta(P)=3ad-bc$. Первая операция, переводящая $P(x)$ в dx^3+cx^2+bx+a, эту величину не меняет. Вторая операция переводит $P(x)$ в многочлен $Q(x)=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3a+2b)x+(d+a+b+c)$, для которого $\Delta(Q)=3(d+{}$ ${}+a+b+c)a-(b+3a)(c+3a+2b)=\Delta(P)-(2b^2+6ab+6a^2)<\Delta(P)$. Таким образом, разрешённые операции не могут увеличивать Δ. С другой стороны, у исходного многочлена эта величина равна -6, а у итогового 0.