XV International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2019
January 12, 9.00-13.30

Second day
(Each problem is worth 7 points)

№4. An isosceles triangle ABC with $AC = BC$ is given. Point D is chosen on the side AC. The circle S_1 of radius R with the center O_1 touches the segment AD and the extensions of BA and BD over the points A and D, respectively. The circle S_2 of radius $2R$ with the center O_2 touches the segment DC and the extensions of BD and BC over the points D and C, respectively. Let the tangent to the circumcircle of the triangle BO_1O_2 at the point O_2 intersect the line BA at point F. Prove that $O_1F = O_1O_2$.

№5. Let $n > 1$ be a positive integer. A function $f : I \to \mathbb{Z}$ is given, where I is the set of all integers coprime with n. ($\mathbb{Z}$ is the set of integers). A positive integer k is called a *period* of the function f if $f(a) = f(b)$ for all $a, b \in I$ such that $a \equiv b \pmod{k}$. It is known that n is a period of f. Prove that the minimal period of the function f divides all its periods.

Example. For $n = 6$, the function f with period 6 is defined entirely by its values $f(1)$ and $f(5)$. If $f(1) = f(5)$, then the function has minimal period $P_{\min} = 1$, and if $f(1) \neq f(5)$, then $P_{\min} = 3$.

№6. On a polynomial of degree three it is allowed to perform the following two operations arbitrarily many times:

(i) reverse the order of its coefficients including zeroes (for instance, from the polynomial $x^3 - 2x^2 - 3$ we can obtain $-3x^3 - 2x + 1$);

(ii) change polynomial $P(x)$ to the polynomial $P(x+1)$.

Is it possible to obtain the polynomial $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ from the polynomial $x^3 - 2$?

XV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы
12 января 2019 года, 9.00-13.30

Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

№4. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC$. На стороне AC выбрана точка D. Окружность S_1 с радиусом R и центром O_1 касается отрезка AD и продолжений BA и BD за точки A и D соответственно. Окружность S_2 с радиусом $2R$ и центром O_2 касается отрезка DC и продолжений BD и BC за точки D и C соответственно. Пусть касательная к описанной окружности треугольника BO_1O_2 в точке O_2 пересекает прямую BA в точке F. Докажите, что $O_1F = O_1O_2$.

№5. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Дана функция $f : I \to \mathbb{Z}$, где I — множество всех целых чисел, взаимно простых с n. ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел). Натуральное число k называется *периодом* функции f если $f(a) = f(b)$ для любых $a, b \in I$ таких, что $a \equiv b \pmod{k}$. Известно, что n является периодом функции f. Докажите, что минимальный период функции f делит все ее периоды.

Пример. Когда $n = 6$, функция f с периодом 6 полностью определяется своими значениями $f(1)$ и $f(5)$. Если $f(1) = f(5)$, то функция имеет минимальный период $P_{\min} = 1$, а если $f(1) \neq f(5)$, то $P_{\min} = 3$.

№6. С многочленом третьей степени разрешается неограниченное число раз проделывать следующие две операции:

(i) переставлять его коэффициенты, включая нулевые, в обратном порядке (так, из многочлена $x^3 - 2x^2 - 3$ можно получить многочлен $-3x^3 - 2x + 1$);

(ii) заменять многочлен $P(x)$ на многочлен $P(x+1)$.

Можно ли получить из многочлена $x^3 - 2$ многочлен $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$?