XV Международная Жаутыковская олимпиада по математике

Решения задач первого дня

№1. Докажите, что существует по крайней мере 100! способов разбить число 100! на сумму слагаемых из множества $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!\}$. (Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми; любое слагаемое можно использовать несколько раз. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Решение. Докажем индукцией, что для всех $n \geqslant 4$ есть хотя бы $n!$ способов разбить число $n!$ на слагаемые из $\{1!, 2!, \ldots, (n-1)!\}$.

Для $n = 4$, если использовать только слагаемые $1!, 2!$ есть 13 способов разбить 4!, так как 2! можно использовать от 0 до 12 раз. Если 3! используется 1 раз, то $4! - 3! = 18$ можно разбить с $1!, 2!$ слагаемыми 10 способами. Еще хотя бы одно разбиение можно получить если использовать 3! два раза. Тогда получим хотя бы 24 необходимых разбиений.

Предположим теперь, что утверждение верно для n и докажем его для $n+1$. Чтобы разбить $(n+1)!$, слагаемое $n!$ можно использовать i раз для $0 \leqslant i \leqslant n$. По предположению, для каждого такого i, оставшееся число $(n+1)! - i \cdot n! = (n+1-i) \cdot n!$ можно разбить на слагаемые $\{1!, \ldots, (n-1)!\}$ по крайней мере $n!$ способами следующим образом. Для каждого разбиения $n!$, слагаемое встречающееся скажем k раз, перепишем $(n+1-i)k$ раз. Таким образом получим по крайней мере $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ способов разбить число $(n+1)!$ как и требовалось. Исходная задача следует для $n = 100$.

№2. Найдите наибольшее действительное число C такое, что для любых попарно различных положительных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2018}}{|a_{2019} - a_1|} + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

Ответ: 1010.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $\min(a_1, a_2, \ldots, a_{2019}) = a_1$. Заметим, что если a, b, c ($b \neq c$) – положительные числа, то $\frac{a}{|b-c|} > \min(\frac{a}{b}, \frac{a}{c})$. Тогда

$$S = \frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \cdots + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > 0 + \min\left(\frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_4}\right) + \cdots + \min\left(\frac{a_{2017}}{a_{2018}}, \frac{a_{2017}}{a_{2019}}\right) + \frac{a_{2018}}{a_{2019}} + \frac{a_{2019}}{a_2} = T.$$

Положим $i_0 = 2$, а для каждого $\ell \geqslant 0$ пусть $i_{\ell+1} = i_\ell + 1$, если $a_{i_\ell+1} > a_{i_\ell+2}$, и $i_{\ell+1} = i_\ell + 2$ в противном случае. Найдём натуральное k, для которого $i_k < 2018$ и $i_{k+1} \geqslant 2018$. Тогда

$$T \geqslant \frac{a_2}{a_{i_1}} + \frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \cdots + \frac{a_{i_k}}{a_{i_{k+1}}} + \frac{a_{2018}}{a_{2019}} + \frac{a_{2019}}{a_2} = A. \qquad (1)$$

Заметим, что $1 \leqslant i_{\ell+1} - i_\ell \leqslant 2$, следовательно, $i_{k+1} \in \{2018, 2019\}$.

Так как

$$2018 \leqslant i_{k+1} = i_0 + (i_1 - i_0) + \cdots + (i_{k+1} - i_k) \leqslant 2(k+2), \qquad (2)$$

имеем $k \geqslant 1007$. Рассмотрим два случая:

(i) $k = 1007$. Значит, в неравенстве (2) везде выполняются равенства, в частности, $i_{k+1} = 2018$. Тогда из (1) по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для $k+3$ чисел следует, что $A \geqslant k + 3 \geqslant 1010$.

(ii) $k \geqslant 1008$. Если $i_{k+1} = 2018$, то, как и в случае (i), получим, что $A \geqslant k+3 \geqslant 1011$. Если $i_{k+1} = 2019$, то из (1) по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для $k+2$ чисел (всех слагаемых, кроме $\frac{a_{2018}}{a_{2019}}$) следует, что $A \geqslant k+2 \geqslant 1010$.

Мы получили, что $S > T \geqslant A \geqslant 1010$. При $a_1 = 1 + \varepsilon$, $a_2 = \varepsilon$, $a_3 = 1 + 2\varepsilon$, $a_4 = 2\varepsilon$, $\ldots$, $a_{2016} = 1008\varepsilon$, $a_{2017} = 1 + 1009\varepsilon$, $a_{2018} = \varepsilon^2$, $a_{2019} = 1$ выходит, что $S = 1009 + 1008\varepsilon + \frac{1008\varepsilon}{1+1009\varepsilon-\varepsilon^2} + \frac{1+1009\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S = 1010$, то есть константу 1010 увеличить нельзя.

№3. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает описанную около него окружность ω в точке N. На лучах CA и CB соответственно отмечены точки P и Q так, что $PM \parallel BN$ и $QM \parallel AN$.

На отрезках PM и QM соответственно отмечены точки X и Y так, что прямые PY и QX касаются ω. Отрезки PY и QX пересекаются в точке Z. Докажите, что четырехугольник $MXZY$ описанный.

Решение. Лемма. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC отмечены точки K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке D. Тогда четырехугольник $CKDL$ описанный тогда, и только тогда, когда $AC - BC = AD - BD$.

Доказательство. Пусть $CKDL$ описанный и вписанная в него окружность касается сторон LC, CK, KD, DL в точках X, Y, Z, T соответственно (см. рис. 1). Тогда

$$AC - BC = AX - BY = AZ - BT = AD - BD.$$

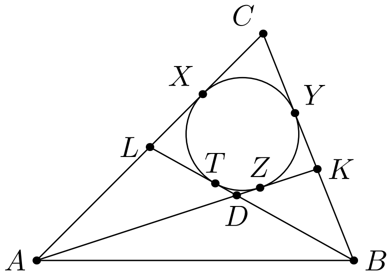

Рис. 1

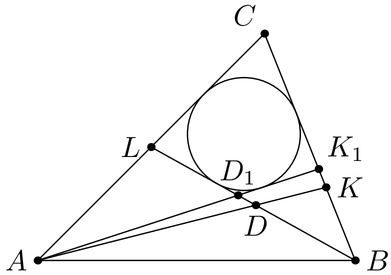

Рис. 2

Пусть теперь выполнено равенство $AC - BC = AD - BD$. И пусть касательная ко вписанной окружности треугольника BLC, отличная от AC, пересекает отрезки BL и BC в точках D_1 и K_1 соответственно. Если $K = K_1$, то лемма доказана. Иначе $AD_1 - BD_1 = AC - BC = AD - BD$ или $AD_1 - BD_1 = AD - BD$. В случае, когда D лежит на отрезке BD_1 (см. рис. 2), имеем:

$$AD_1 - BD_1 = AD - BD \Rightarrow AD_1 - AD = BD_1 - BD \Rightarrow AD_1 - AD = DD_1.$$

Но последнее равенство противоречит неравенству треугольника, так как $AD_1 - AD < DD_1$. Случай, когда D лежит вне отрезка BD_1, рассматривается аналогично.

Вернемся к решению задачи. Пусть PY и QX касаются ω в точках Y_1 и X_1 соответственно. Из вписанности $ACBN$ и параллельности $PM \parallel BN$ следует, что $\angle ACN = \angle ABN = \angle AMP$, то есть описанная окружность $\triangle AMC$ касается прямой PM. Следовательно, $PM^2 = PA \cdot PC$. Но $PA \cdot PC = PY_1^2$, поэтому $PM = PY_1$. Аналогично доказывается равенство $QM = QX_1$. Очевидно, что $ZX_1 = ZY_1$. Осталось заметить, что из леммы следует описанность $MXZY$, так как

$$PM - QM = PY_1 - QX_1 = (PZ + ZY_1) - (QZ + ZX_1) = PZ - QZ \quad \Rightarrow \quad PM - QM = PZ - QZ.$$

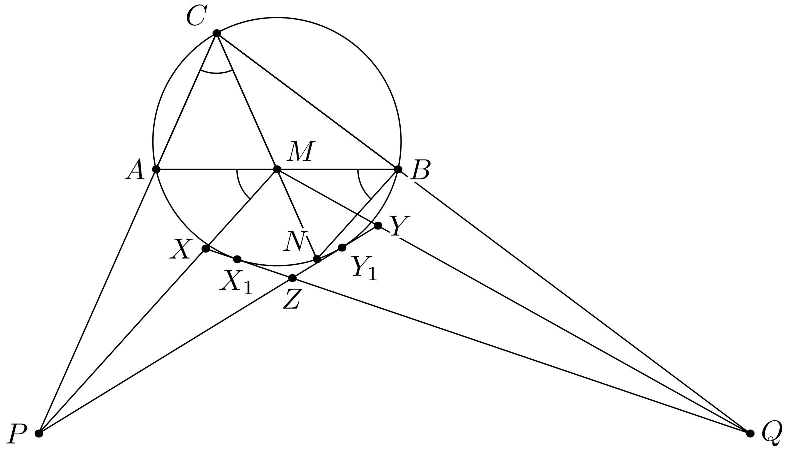

Рис. 3

Замечание. В этом решении не используется то, что M — середина AB.