XV International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2019
January 11, 9.00-13.30

First day
(Each problem is worth 7 points)

№1. Prove that there are at least 100! ways to partition the number 100! into summands from the set $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!\}$. (Partitions differing in the order of summands are considered the same; any summand can be taken multiple times. We remind that $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

№2. Find the largest real C such that for all pairwise distinct positive real $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ the following inequality holds

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2018}}{|a_{2019} - a_1|} + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

№3. The extension of median CM of the triangle ABC intersects its circumcircle ω at N. Let P and Q be the points on the rays CA and CB respectively such that $PM \parallel BN$ and $QM \parallel AN$. Let X and Y be the points on the segments PM and QM respectively such that PY and QX are tangent to ω. The segments PY and QX intersect at Z. Prove that the quadrilateral $MXZY$ is circumscribed.

XV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы,
11 января 2019 года, 9.00-13.30

Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

№1. Докажите, что существует по крайней мере 100! способов разбить число 100! на сумму слагаемых из множества $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!\}$. (Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми; любое слагаемое можно использовать несколько раз. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

№2. Найдите наибольшее действительное число C такое, что для любых попарно различных положительных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2018}}{|a_{2019} - a_1|} + \frac{a_{2019}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

№3. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает описанную около него окружность ω в точке N. На лучах CA и CB соответственно отмечены точки P и Q так, что $PM \parallel BN$ и $QM \parallel AN$. На отрезках PM и QM соответственно отмечены точки X и Y так, что прямые PY и QX касаются ω. Отрезки PY и QX пересекаются в точке Z. Докажите, что четырехугольник $MXZY$ описанный.