X Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2014

14 января 2014 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC лежат точки M, N, K соответственно, не совпадающие с вершинами. Треугольник MNK назовём *красивым*, если $\angle BAC=\angle KMN$ и $\angle ABC=\angle KNM$. Докажите, что если в треугольнике ABC существуют два красивых треугольника с общей вершиной, то треугольник ABC – прямоугольный.

Решение. Пусть KMN и $KM'N'$ два красивых треугольника с общей вершиной. Тогда $\angle KMN=\angle A=\angle KM'N'$. Без потери общности, пусть M' лежит между B и M. Пусть R это общая точка отрезков MN и $M'N'$. Поскольку $\angle KMR=\angle KM'R$, то K, M, M', R лежат на одной окружности и $\angle KM'M=180°-\angle KRM=\angle KRN$. Аналогично, точки K, N, N', R лежат на одной окружности, отсюда, $\angle KN'N=\angle KRN$. Следовательно,

$$\angle KM'C=\angle KM'M=\angle KN'N=180°-\angle KN'C$$

Значит, четырехугольник $KM'CN'$ вписанный и $180°=\angle C+\angle M'KN'=2\angle C$, поэтому угол C прямой.

2. Существует ли функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) для каждого вещественного y существует вещественное x такое, что $f(x)=y$, и

(ii) $f(f(x))=(x-1)f(x)+2$ при всех вещественных x?

Ответ: нет такой функции f.

Решение. Предположим, что существует функция f, удовлетворяющая условию задачи.

1. Пусть $f(1)=a$. Подставим $x=1$ в следующее равенство

$$f(f(x))=(x-1)f(x)+2. \qquad (1)$$

   Значит, $f(a)=2$.
2. Подставим $x=a$ в (1), тогда $f(2)=(a-1)\cdot 2+2$, значит, $f(2)=2a$.
3. Согласно условию $\exists b\in R: f(b)=1$. Подставим $x=b$ в (1), тогда

$$a=f(1)=f\big(f(b)\big)=(b-1)\cdot 1+2=b+1, b=a-1.$$

4. Согласно условию $\exists c\in R: f(c)=0$. Подставим $x=c$ в (1), тогда

$$f(0)=f\big(f(c)\big)=(c-1)\cdot 0+2=2,\ f(0)=2.$$

Таким образом, $2=f(0)=f(a)$, откуда $f\big(f(0)\big)=f(f(a))$, или $(0-1)f(0)+2=(a-1)f(a)+2$, или $-1\cdot 2+2=(a-1)\cdot 2+2$, так как $a=0$. Следовательно, $f(0)=2, f(2)=2a=0, f(1)=0, b=-1, f(-1)=1$.

5. Пусть $d \in R$ такое, что $f(d) = -1$. Подставим $x = d$ в (1), тогда

$$1 = f(-1) = f\big(f(d)\big) = (d-1)\cdot(-1) + 2 = -d + 3,$$

откуда, $d = 2$. Следовательно, $f(2) = -1$, однако это противоречит тому, что $f(2) = 0$.

Замечание. Необходимо отметить, что существует функция f удовлетворяющая (1) такая, что $E(f) \neq R$. Например,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \text{ или } f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

3. Даны сто различных натуральных чисел. Назовем пару чисел *хорошей*, если числа в ней отличаются в 2 или в 3 раза. Какое наибольшее число хороших пар могут образовывать эти сто чисел? (Одно и то же число может входить в несколько пар.)

Ответ: 180.

Решение. Переформулируем нашу задачу. Пусть даны 100 точек целочисленной решетки (такие точки на плоскости, обе координаты которых является целыми числами). Какое наибольшее количество различных пар соседних точек (точки на расстояние 1) может быть среди них?

Чтобы доказать, что наша задача эквивалента выше указанной поставим в соответствие каждому числу вида 2^i3^j точку (i, j). В построенном таким образе множестве количество необходимых пар равно количеству соседних точек во множества из 100 точек.

И наоборот, в любом множестве из 100 чисел мы можем для каждого числа найти его наибольший делитель m, не кратный 2 или 3, и разбить множество на группы чисел с таким же делителем m (то есть числа из одной группы имеют одинаковый наибольший делитель, не кратный 2 или 3). Очевидно, что числа, образующие хорошую пару, принадлежат одной группе. Тогда мы можем каждой группе назначить свое множество точек, то есть точкам вида (i, j) соответствуют числа 2^i3^jm. Если окажется, что некоторым числам из различных групп соответствует одинаковые или соседние точки, то мы можем их сдвинуть образ каждой группы на вектор достаточно большой длины, чтобы такого не происходило.

Докажем, что наибольшее количество соседних пар достигается, когда точки образуют квадрат 10×10 (и это количество равно 180).

Рассмотрим строки (т.е. множество точек с одинаковой ординатой) и столбцы (т.е. множество точек с одинаковой абсциссой). Пусть мы имеем a не пустых строк и b не пустых столбцов. Ясно, что $ab \geq 100$.

Заметим, что если строка состоит из k точек, то количество соседних точек в строке не более k-1. Положим количество точек в строках k_1, k_2, …, k_a, тогда количество горизонтальных соседей не более $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_a - 1) = 100 - a$. Аналогично, количество вертикальных соседей не более $100 - b$. Следовательно, согласно неравенству Коши, общее количество соседей не превосходит $200 - a - b \leq 200 - \sqrt{ab} \leq 180$.

Не сложно убедиться, что во множестве из 100 точек, образующих квадрат 10×10, количество соседей равно 180.

X Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2014

15 января 2014 года, 9.00–13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P\left(1+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}$ и $P\left(3+\sqrt{5}\right)=3+\sqrt{5}$?

Ответ: Нет.

Решение. Пусть для каждого многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ целые числа a, b, c, d определены таким образом, что $P(1+\sqrt{3})=a+b\sqrt{3}$ и $P(3+\sqrt{5})=c+d\sqrt{5}$. Назовём многочлен хорошим, если $a-c$ и $b-d$ – четные числа. Заметим, что если P и Q хорошие многочлены и k целое число, то многочлены $P+Q$ и kP также являются хорошими. Докажем, что многочлен $R=P\cdot Q$ является хорошим. Действительно, если $P(1+\sqrt{3})=a+b\sqrt{3}$, $P(3+\sqrt{5})=c+d\sqrt{5}$, $Q(1+\sqrt{3})=a'+b'\sqrt{3}$, $Q(3+\sqrt{5})=c'+d'\sqrt{5}$, то

$$R(1+\sqrt{3})=(a+b\sqrt{3})(a'+b'\sqrt{3})=(aa'+3bb')+(ab'+ba')\sqrt{3},$$

$$R(3+\sqrt{5})=(c+d\sqrt{5})(c'+d'\sqrt{5})=(cc'+5dd')+(cd'+dc')\sqrt{5}.$$

Ясно, что если $a\equiv c$ (mod 2), $b\equiv d$ (mod 2), $a'\equiv c'$ (mod 2), $b'\equiv d'$ (mod 2), то $aa'+3bb'\equiv cc'+5dd'$ (mod 2) и $ab'+ba'\equiv cd'+dc'$ (mod 2).

Поскольку многочлен $P(x)=x$ является хорошим, то в силу ранее отмеченного все многочлены с целыми коэффициентами хорошие, поэтому многочлена, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

5. Пусть $U=\{1,2,...,2014\}$. Для натуральных a, b, c обозначим через $f(a,b,c)$ количество упорядоченных наборов множеств $(X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $Y_1\subseteq X_1\subseteq U$ и $|X_1|=a$;

(ii) $Y_2\subseteq X_2\subseteq U\setminus Y_1$ и $|X_2|=b$;

(iii) $Y_3\subseteq X_3\subseteq U\setminus(Y_1\cup Y_2)$ и $|X_3|=c$.

Докажите, что $f(a,b,c)$ не меняется при перестановке a, b и c. (Здесь $|A|$ обозначает количество элементов множества A.)

Решение. Заметим, что нам достаточно доказать для любых натуральных чисел a, b, c следующие равенства $f(a,b,c)=f(b,a,c)=f(a,c,b)$.

Рассмотрим сначала следующую переформулировку нашей задачи:

Для всякой шестерки $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$, удовлетворяющей условию задачи, построим последовательность

$$A = (a_1, \ldots, a_{2014}),\ B = (b_1, \ldots, b_{2014}),\ C = (c_1, \ldots, c_{2014})$$

следующим образом

$$a_i = \begin{cases} 2, \text{если } i \in Y_1, \\ 1, \text{если } i \in X_1 \backslash Y_1, \\ 0, \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где i=1, 2, …, 2014.

Аналогично поступим и для последовательностей B и C. Применяя условия (i), (ii), (iii) для последовательностей (A, B, C), получим

($P1$) количество ненулевых элементов последовательности A равно a, количество не нулевых элементов $B - b$, количество ненулевых элементов $C - c$.

($P2$) если для некоторого i выполнено a_i=2, то b_i=c_i=0; если b_i=2, то c_i=0.

Ясно, что для любых последовательностей A, B, C, удовлетворяющих условиям ($P1$) и ($P2$) мы можем построить последовательность (X_1, X_2, X_3, Y_1,Y_2, Y_3), удовлетворяющей условиям (i), (ii), (iii) задачи.

Таким образом, $f(a, b, c)$ – количество наборов (A, B, C), удовлетворяющих условиям ($P1$) и ($P2$).

Докажем сначала, что $f(a, b, c) = f(b, a, c)$. Установим взаимно-однозначное соответствие Φ_1 между тройками соответствующим наборам (a, b, c) и (b, a, c) следующим образом

$$\Phi_1((A, B, C)) = (A', B', C),$$

где $A' = (a'_1, ..., a'_{2014})$, $B' = (b'_1, ..., b'_{2014})$ и для всякого i = 1,…,2014

$$(a'_i, b'_i) = (b_i, a_i), \text{ если } (a_i, b_i) \neq (1,2), \text{ иначе } (a'_i, b'_i) = (a_i, b_i).$$

(Применяя наше преобразование дважды получим исходный набор.)

Применяя Φ_1, мы получим свойство ($P1$) для (b, a): количество вхождений наборов (1,2) в A' равно b и количество вхождений наборов (1,2) в B' равно a. Покажем, что условие ($P2$) также выполнено. Предположим противоположное. Тогда существует i такое, что $a'_i = 2$ и $b'_i \in \{2,1\}$; пара (2, 2) не может встретиться до тех пор пока не поменяются местами (a_i, b_i); b'_i не может совпадать с 1 до тех пор пока не поменяются местами (1, 2). Относительно последовательности С выполним следующее: если $b'_i = 2$, то a_i равно 2, значит, c_i=0. Таким образом, $f(a, b, c) = f(b, a, c)$.

Для доказательства равенства $f(a, b, c) = f(a, c, b)$ рассмотрим аналогичную биекцию Φ_2:

$$\Phi_1((A, B, C)) = (A, B', C'),$$

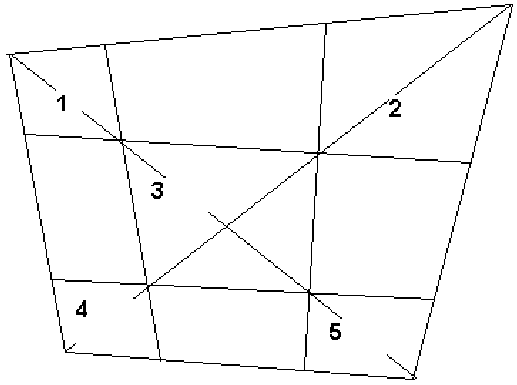
где $B' = (b'_1, ..., b'_{2014})$, $C' = (c'_1, ..., c'_{2014})$ и для всякого i = 1,…,2014

$$(b'_i, c'_i) = (c_i, b_i), \text{ если } (b_i, c_i) \neq (1,2), \text{ иначе } (b'_i, c'_i) = (b_i, c_i).$$

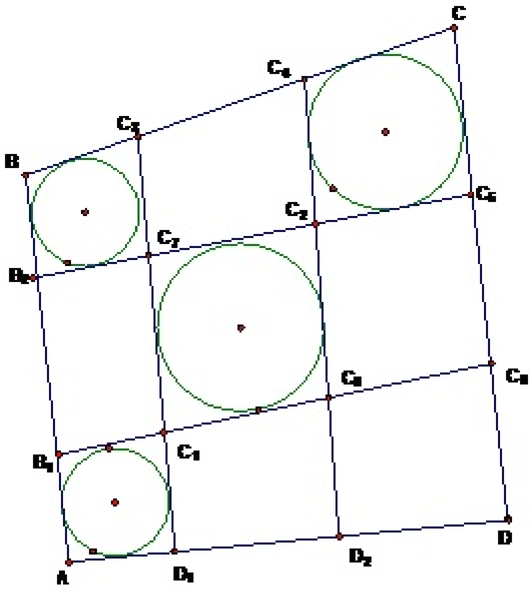
Используя аналогичные выше приведенным рассуждениям можно показать, что для пар (B', C') условия выполнены ($P1$) и ($P2$).

6. Выпуклый четырёхугольник поделен на девять четырехугольников четырьмя отрезками, точки пересечения которых лежат на диагоналях исходного четырехугольника (см.

рисунок). Известно, что в четырехугольники 1, 2, 3, 4 можно вписать окружности. Докажите, что в четырехугольник 5 также можно вписать окружность.



Решение. Докажем предварительно следующую лемму.



Лемма. Четырехугольник *XYZT* является описанным тогда и только тогда, когда

$$\tan\frac{\angle YXZ}{2} : \tan\frac{\angle TXZ}{2} = \tan\frac{\angle YZX}{2} : \tan\frac{\angle TZX}{2}.$$

Доказательство леммы. Пусть вписанные окружности треугольников XYZ и XTZ касаются XZ в точках Y_1 и T_1, соответственно. Как известно, $XY_1 = \frac{XY + XZ - YZ}{2}$ и $XT_1 = \frac{XT + XZ - YZ}{2}$. Отсюда, $XYZT$ является описанным тогда и только тогда, когда $XY_1 = XT_1$, что эквивалентно $XY_1 : Y_1Z = XT_1 : T_1Z$ или

$$\tan\frac{\angle YXZ}{2} : \tan\frac{\angle TXZ}{2} = \tan\frac{\angle YZX}{2} : \tan\frac{\angle TZX}{2}.$$

Применяя лемму для четырехугольников: $B_1AD_1C_1$, $C_7C_1C_8C_2$, $C_4C_2C_6C$, получим

$$\tan\frac{\angle B_1AC_1}{2}:\tan\frac{\angle D_1AC_1}{2}=\tan\frac{\angle B_1C_1A}{2}:\tan\frac{\angle D_1C_1A}{2}=\tan\frac{\angle C_8C_1C_2}{2}:\tan\frac{\angle C_7C_1C_2}{2}=$$
$$=\tan\frac{\angle C_8C_2C_1}{2}:\tan\frac{\angle C_7C_2C_1}{2}=\tan\frac{\angle CC_2C_4}{2}:\tan\frac{\angle CC_2C_5}{2}=\tan\frac{\angle C_2CC_4}{2}:\tan\frac{\angle C_2CC_5}{2}.$$

Значит,

$$\tan\frac{\angle BAC}{2}:\tan\frac{\angle DAC}{2}=\tan\frac{\angle BCA}{2}:\tan\frac{\angle DCA}{2},$$

следовательно, четырехугольник $ABCD$ описанный.

Также используя лемму для четырехугольников $BB_2C_7C_3$, $C_7C_1C_8C_2$, $ABCD$, имеем

$$\tan\frac{\angle C_6C_8D}{2}:\tan\frac{\angle D_2C_8D}{2}=\tan\frac{\angle C_6DC_8}{2}:\tan\frac{\angle D_2DC_8}{2}.$$

Следовательно, четырехугольник $C_6C_8DD_2$ описанный. Что и требовалось доказать.