VIII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2012

17 января 2012 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Внутри стороны AB остроугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Точки M и N – основания перпендикуляров, опущенных из D на стороны BC и AC соответственно. Пусть H_1 и H_2 – ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника AH_1BH_2 не зависит от положения точки D на стороне AB.

2. Множество (единичных) клеток таблицы $n \times n$ назовём *удобным*, если в каждой строке и каждом столбце таблицы есть по крайней мере две клетки этого множества. При каждом $n \geq 5$ найдите наибольшее m, для которого найдётся удобное множество из m клеток, которое перестает быть удобным при удалении любой из его клеток.

3. Многочлены P, Q, R с вещественными коэффициентами таковы, что многочлен $P(Q(x)) + P(R(x))$ – постоянный. Докажите, что хотя бы один из многочленов $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ является постоянным.

VIII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2012

17 January, 2012, 9.00–13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Given is acute triangle ABC, let D be an arbitrary inner point of the side AB. Let M and N be the foots of perpendiculars from D to BC and AC respectively, H_1 and H_2 denote the orthocentres of the triangles MNC and MND respectively. Prove that the area of the quadrilateral AH_1BH_2 does not depend on the position of D on AB.

2. A set of (unit) squares of $n \times n$ table is called *convenient* if each row and each column of the table contains at least two squares belonging to the set. For each $n \geq 5$ determine the maximum m for which there exists a convenient set of m squares that becomes inconvenient when any of its squares is removed.

3. Polynomials P, Q, R with real coefficients are such that $P(Q(x)) + P(R(x)) = \text{const}$. Prove that $P(x) = \text{const}$ or $Q(x) + R(x) = \text{const}$.