VII Международная Жаутыковская олимпиада 2011 года
РЕШЕНИЕ задач по математике

Задача №4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновре-менно следующим условиям:

i) каждое множество состоит из 4 элементов;

ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;

iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

Решение. Мы сначала покажем, что существуют 7 множеств, удовлетворяющих условиям i)-iii) задачи.

Например, легко проверить, следующий набор множеств подходит:
A_1={1;2;3;8}, A_2={1;4;5;8}, A_3={1;6;7;8}, A_4={2;4;6;8}, A_5={2;5;7;8}, A_6={3;4;7;8}, A_7={3;5;6;8}.

Вот еще два примера подходящих наборов множеств:
A_1={1;2;3;4}, A_2={1;2;5;6}, A_3={3;4;5;6}, A_4={1;3;6;7}, A_5={2;4;6;7}, A_6={1;4;5;7}, A_7={2;3;5;7};

или:
A_1={1;2;3;4}, A_2={1;2;5;6}, A_3={1;2;7;8}, A_4={1;3;6;7}, A_5={1;3;5;8}, A_6={2;3;6;8}, A_7={2;3;5;7}.

Теперь докажем, что не существует более 7 множеств, удовлетворяющих данным условиям.

Сначала мы докажем одну лемму.

Лемма. Никакие два элемента не принадлежат более, чем 3 множествам.

Доказательство. От противного, пусть некоторые 4 множества A_1, A_2, A_3, A_4 содержат одни и те же два элемента a,b. По условию iii) существует некоторое множество B, не содержащее пару $\{a,b\}$. Если B один из этих элементов, скажем, a, тогда по условию ii) B должен содержать элемент (не совпадающий с b) $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $a_3\in A_3$, $a_4\in A_4$, причем все эти элементы различны. Значит, $\{a,a_1,a_2,a_3,a_4\}\subset B$, и $|B|\geq 5$ – противоречие условию i). Если же B не содержит ни a и ни b, тогда B содержит 5 непересекающихся пар элементов, одну пару, общую с A_1, одну – с A_2, одну – с A_3 одну – с A_4, следовательно, $|B|\geq 10$, противоречие. Таким образом, лемма доказана.

Теперь предположим, что существуют, по крайней мере, 8 множеств, удовлетворяющих данным условиям. Выберем одно из них, пусть A, и еще некоторых 7 из них: B_1, B_2, … , B_7. Пусть $A=\{a,b,c,d\}$.

Рассмотрим, три двойки различных пар элементов в А:

I) $\{a;b\},\{c,d\}$;

II) $\{a;c\}, \{b;d\}$;

III) $\{a;d\}, \{b;c\}$.

Каждое из 7 множеств B_1, B_2, … , B_7 имеет общую пару элементов с A. Следовательно, найдутся, по крайней мере, 3 из них, которые имеют общую пару с A с одной и той же двойки пар I), II), III).

Пусть, для определенности, общие пары каждого из B_1, B_2, B_3 с A принадлежат двойке I). По Лемме не все эти 3 множества B_1, B_2, B_3 имеют одну и ту же общую пару с A (иначе эта пара принадлежала бы более, чем 3 множествам). Поэтому мы можем предполагать, что $\{a,b\}\subset B_1$ и $\{c,d\}\subset B_2$, $\{c,d\}\subset B_3$. Из условия задачи следует $c,d\notin B_1, a,b\notin B_2, a,b\notin B_3$. Пусть x, y – два элемента, отличные от a, b, c, d такие, что $B_1=\{a;b;x;y\}$. Так как B_1 имеет общую пару с B_2, мы заключаем, что $x,y\in B_2$. Аналогично, B_1 имеет общую пару с B_3, поэтому $x,y\in B_3$. Следовательно, мы получаем $B_2=B_3=\{c;d;x;y\}$, противоречие. Таким образом, задача решена.

Ответ: 7 множеств.

Задача № 5. Пусть n – целое число, $n>1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M, такой, что число $ab-b$ делится на n^2. Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если a^2-a делится на n^2. Пусть g и v – число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно.

Докажите, что $v^2+ v \le g \le n^2- n$.

Решение. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение n на простые множители (т.е. p_i – простые, α_i – натуральные, $p_i \ne p_j$ для $i \ne j$). Пусть $a\in M = \{1, 2, \ldots , n^2-1\}$.

Лемма 1. Элемент a является хорошей $\Leftrightarrow$ НОД$(a-1,n^2) > 1$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если a – хорошая, тогда $ab-b = b(a-1)$ делится на n^2 для некоторого $1 \le b < n^2$. Как следствие, получаем НОД$(a-1,n^2) > 1$.

($\Leftarrow$) Пусть $a\in M$ и $\gcd(a-1,n^2) = d > 1$. Тогда для $b = n^2/d \in M$ число $b(a-1) = ab-b$ делится на n^2.

Следствие. Количество хороших элементов равно $n^2-\varphi(n^2)$, где φ – функция Эйлера.

Теперь легко доказать одно из неравенств:

$$g = n^2-\varphi(n^2) = n^2 - n\varphi(n) \le n^2 - n .$$

Лемма 2. Элемент a является очень хорошей $\Leftrightarrow$ существует бинарная последовательность $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k) \ne (0,0,\ldots,0)$ такая, что $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$ для каждого $1\le i \le k$ (здесь *бинарность* последовательности означает, что каждое $\varepsilon_i \in\{0,1\}$).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если a – очень хорошая, то по определению $n^2 \mid a(a-1)$. Значит, найдутся n_1,n_2 такие, что $n^2 = n_1 n_2$, $n_1 \mid a$ и $n_2 \mid a-1$. Заметим, что n_1,n_2 взаимно просты, так как НОД$(n_1,n_2) =$ НОД$(a,a-1) = 1$. Поэтому найдется $\varnothing \ne A \subseteq \{1,2,\ldots,k\}$ такое, что

$$n_1 = \prod_{i\in\{1,2,\ldots k\}\setminus A} p_i^{2\alpha_i} \text{ и } n_2 = \prod_{i\in A} p_i^{2\alpha_i} .$$

Следовательно, по китайской теореме об остатках, мы видим, что a является (единственным в M) решением системы сравнений $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1\le i\le k$, для бинарной последовательности $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k)$, определенной следующим образом:

$$\varepsilon_i = 1 \Leftrightarrow i\in A .$$

($\Leftarrow$) Если a является решением системы сравнений $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1\le i\le k$, для бинарной последовательности $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k)$, тогда, поскольку $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$, число a^2 также будет решением этой системы. По китайской теореме об остатках, мы получим $a^2 \equiv a \bmod n^2$, другими словами a^2-a делится на n^2, т.е. a – очень хорошая.

Следствие. Количество очень хороших элементов равно 2^k-1.

Далее, пусть a – произвольный очень хороший элемент, определенный системой $a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}$, $1\le i\le k$, с бинарной последовательностью $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k)$. Теперь, мы для каждого $B\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ построим хороший элемент a_B следующим образом: a_B является (единственным в M) решением системы

$$\begin{cases} a \equiv \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}, \text{ for } i\in\{1,2,\ldots,k\}\setminus B \\ a \equiv p_i + \varepsilon_i \bmod p_i^{2\alpha_i}, \text{ for } i\in B \end{cases} .$$

Заметим, что $a_\varnothing = a$.

Наконец, снова по китайской теореме об остатках, для очень хороших элементов a,b и $X,Y\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ имеет место:

$$\left[a_X = b_Y\right] \text{ влечет } [a = b \text{ и } X = Y].$$

Таким образом, $g \geq 2^k(2^k - 1) = v^2 + v$, и задача решена.

Задача №6. Диагонали вписанного четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *K*, точки *M* и *N* – середины диагоналей *AC* и *BD* соответственно. Описанные окружности треугольников *ADM* и *BCM* пересекаются в точках *M* и *L*. Докажите, что точки *K*, *L*, *M* и *N* лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

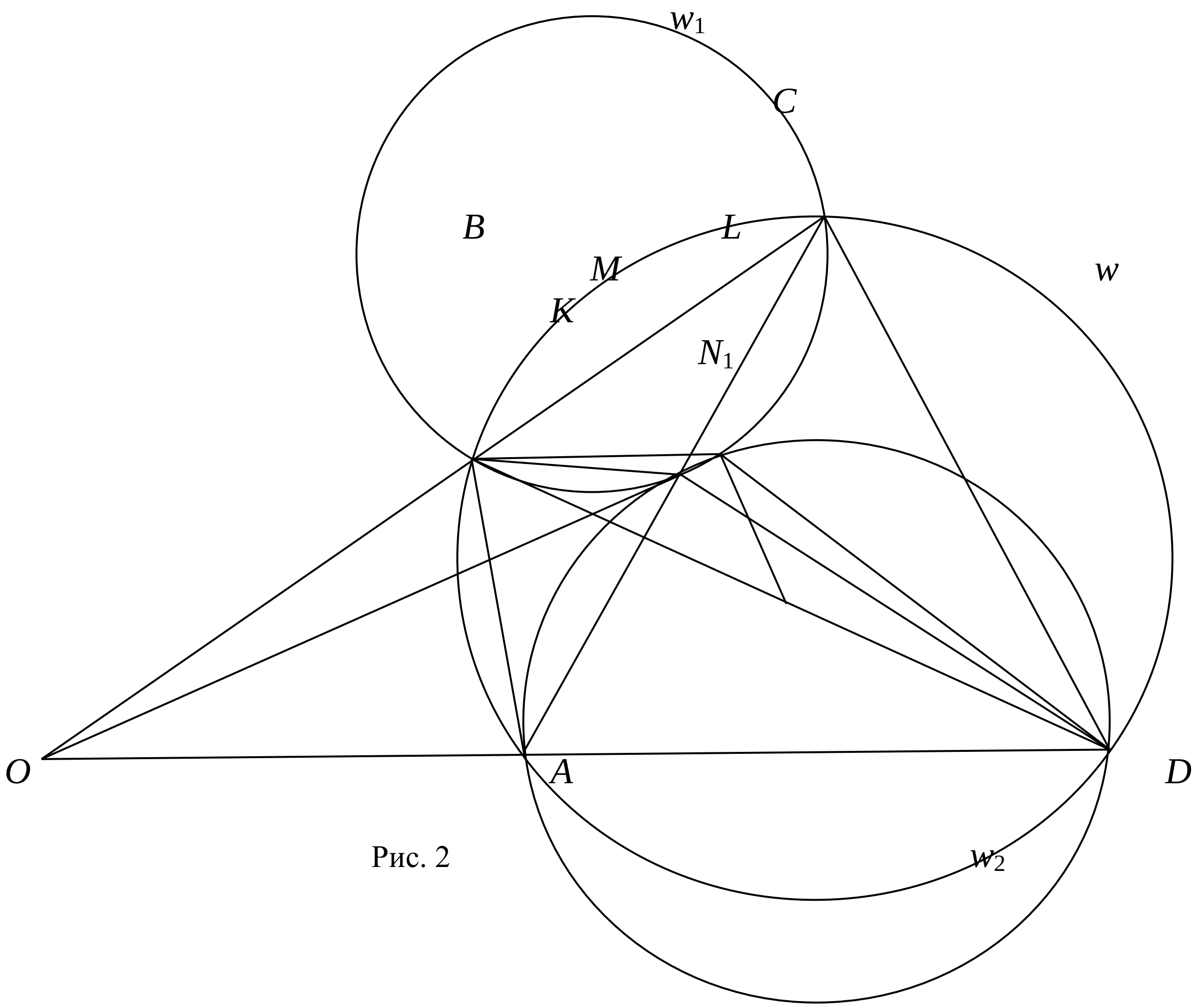

Рис. 2

Решение. Из условия задачи вытекает, что прямые *BC* и *AD* не параллельны. Пусть *O* – точка их пересечения (см. Рис. 2.). Обозначим окружности, описанные около треугольников *BMC*, *AMD*, *ABC*, соответственно через w_1, w_2 и *w*. Заметим, что прямые *BC*, *ML* и *AD* являются радикальными осями пар окружностей w_1 и *w*, w_1 и w_2, w_2 и *w*, соответственно. Следовательно, эти три прямые пересекаются в одной точке, а именно в точке *O*.

Пусть окружность, описанная около треугольника *KML*, пересекает прямую *BD* в точках *K* и N_1. Заметим, что $\angle BLM = \angle BCM$, $\angle MLN_1 = \angle MKB$, Следовательно, $\angle BLN_1 = \angle BLM + \angle MLN_1$ $= \angle BCM + \angle MKB = \angle OBD = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - \angle CAD = \angle OAC$ и $\angle N_1LD = \angle MLD - \angle MLN_1 =$ $= \angle OAC - \angle AKD = \angle ODB$.

Вычислим соотношение $\dfrac{BN_1}{N_1D}$. Имеем

$$\frac{BN_1}{N_1D}=\frac{S_{BLN_1}}{S_{LDN_1}}=\frac{BL\cdot\sin\angle BLN_1}{LD\cdot\sin\angle DLN_1}=\frac{BL\cdot\sin\angle OAC}{LD\cdot\sin\angle ODB}=\frac{BL\cdot\sin\angle OAC}{LD\cdot\sin\angle OCA}=\frac{BL}{LD}\cdot\frac{OC}{OA}. \qquad (1)$$

Заметим, что $\Delta OCM \sim \Delta OLB$ и $\Delta OMA \sim \Delta ODL$, Следовательно, $\frac{OC}{OL}=\frac{CM}{BL}$ и $\frac{OA}{OL}=\frac{MA}{LD}$. (2)

Из (1) и (2) следует, что $\frac{BN_1}{N_1D}=\frac{CM\cdot OL}{OL\cdot MA}=1$, Следовательно, точки N_1 и N совпадают. Это значит, что окружность, описанная около треугольника ΔMKL, проходит через точку N.

Замечание. Если точки M и N лежат соответственн на диагоналях AC и BD, и $\frac{BN}{ND}=\frac{CM}{MA}$, тогда точки K, L, M, N лежат на одной окружности, где точка L определена как в условии задачи.