VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2011

17 января 2011 года, 9.00–13.30
Второй день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:

i) каждое множество состоит из 4 элементов;

ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;

iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

5. Пусть n – целое число, $n>1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M, такой, что число $ab-b$ делится на n^2. Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если a^2-a делится на n^2. Пусть g и v – число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно.

Докажите, что $v^2+v \le g \le n^2-n$.

6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2011

17 January, 2011, 9.00–13.30
Second day
(Each problem is worth 7 points)

4. Find the maximum number of sets which simultaneously satisfy the following conditions:

i) any of the sets consists of 4 elements;

ii) any two different sets have exactly 2 common elements;

iii) no two elements are common to all the sets.

5. Let n be an integer, $n>1$. An element a of the set $M = \{1, 2, \ldots, n^2-1\}$ is called *good* if there exists some element b of M such that $ab-b$ is divisible by n^2. Furthermore, an element a is called *very good*, if a^2-a is divisible by n^2. Let g denote the number of good elements in M and v denote the number of very good elements in M.

Prove that $v^2+v \le g \le n^2-n$.

6. Diagonals of the cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect at point K; M and N are midpoints of the diagonals AC and BD respectively. The circumscribed circles of the triangles ADM and BCM intersect at points M and L. Prove that the points K, L, M and N lie on a circle (all the points are supposed to be different).