VII Международная Жаутыковская олимпиада 2011 года
РЕШЕНИЕ задач по математике

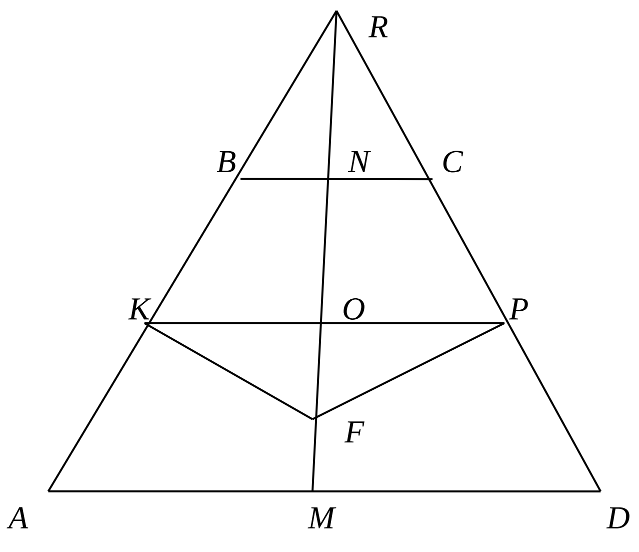
Задача №1. В трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований AD и BC соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN ?

Решение.
а) Пусть $AD>BC$, лучи AB и DC пересекаются в точке R. Обозначим середины боковых сторон AB и CD соответственно через K и P (см. Рис. 1 внизу).
Хорошо известно, что точки R, M, N и O лежат на одной прямой, где точка O – середина отрезка KP (так как $BC \| KP \| AD$).
Пусть F – точка пересечения серединных перпендикуляров сторон AB и CD. По условию задачи $F \in OM$, и из предположения $AD>BC$ вытекает $ON = OM \geq OF$.
Заметим, что точки K и P лежат на окружности с диаметром RF. Тогда, так как $KO = OP$ и $RO>OF$ (следовательно, O не является центром этой окружности), то имеем $RF \perp KP$, значит $RM \perp AD$. Это означает, что треугольник ΔRAD – равнобедренный, следовательно, трапеция $ABCD$ также является равнобедренной.

Рис. 1



б) В этом случае трапеция, вообще говоря, вполне может быть не равнобедренной.
Рассмотрим неравнобедренную трапецию $ABCD$ с $AB \perp CD$. Тогда $KRPF$ – прямоугольник. Следовательно, точка F лежит на прямой RO (т.е. на прямой MN, см. обозначения из предыдущего пункта). Таким образом, мы получаем нужный пример.

Задача № 2. Найдите все функции f: $R \to R$ такие, что для любых $x, y \in R$ выполнено равенство $f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$.
(Здесь R обозначает множество действительных чисел.)

Решение. Заметим, что функция $f(x) \equiv 0$ удовлетворяет тождеству (из условия задачи)

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y). \qquad (*)$$

Теперь допустим, что f тождественно не равна нулю; пусть $x_0 \in R$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда подставляя $y = x_0$ в тождество (*), мы получим

$$f(x + \alpha) = f(x - \alpha) + 4\alpha x \qquad (1)$$

где $\alpha = f(x_0)$.

Пусть теперь $x = z - f(y)$ для произвольных $z,y \in R$. Тогда (*) преобразуется в следующее тождество

$$f(z) = f(z - 2f(y)) + 4(z - f(y))f(y),$$

или

$$f(z) - z^2 = f(z - 2f(y)) - (z - 2f(y))^2. \qquad (2)$$

Мы докажем, что $f(a) - a^2 = f(b) - b^2$ для любых $a,b \in R$. Для этой цели, мы подставим $x = x_1 = (a - b)/8\alpha$ в тождестве (1) и получим

$$f(x_1 + \alpha) - f(x_1 - \alpha) = (a - b)/2,$$

которое может быть переписано в следующем виде:

$$a - 2f(x_1 + \alpha) = b - 2f(x_1 - \alpha).$$

Подставляя $z = a$, $y = x_1 + \alpha$ и $z = b$, $y = x_1 - \alpha$ в тождество (2), мы получим

$$f(a) - a^2 = f(a - 2f(x_1 + \alpha)) - (a - 2f(x_1 + \alpha))^2 = f(b - 2f(x_1 - \alpha)) - (b - 2f(x_1 - \alpha))^2 = f(b) - b^2,$$

т.е. $f(a) - a^2 = f(b) - b^2$ для любых $a,b \in R$.

Это означает, что функция $f(x) - x^2$ постоянна: $f(x) - x^2 = c$, значит , $f(x) = x^2 + c$ для некоторой вещественной константы c.

Легко проверить, что любая функция вида $f(x) = x^2 + c$ удовлетворяет тождеству (*).

Ответ: $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = x^2 + c$, где c – произвольная вещественная постоянная.

Задача № 3. Обозначим через N множество всех целых положительных чисел. Упорядочен-ную пару $(a;b)$ чисел $a,b \in N$ назовем *интересной*, если для любого $n \in N$ существует $k \in N$, такое, что число $a^k + b$ делится на 2^n. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

Решение. Мы введем следующие обозначения. Пусть I обозначает множество всех (упорядоченных) пар, а $V(m)$ – наибольшее (неотрицательное) целое число такое, что $2^{V(m)}$ делит m.

Мы докажем некоторые свойства интересных пар.

***Свойство* 1.** Если $(a;b) \in I$, тогда a и b – нечетные числа, большие 1.

Доказательство. Если одно из чисел a, b четно, тогда для n=1 существует $k \in N$ такое, что число $a^k + b$ делится на 2, значит a и b имеют одинаковую четность, т.е. a и b – четные. Пусть $V(b) = m$, тогда для $k \geq m+1$ имеем $V(a^k + b) = m$. Это означает, что пара $(a;b)$ не является интересной. Итак, a и b – нечетные числа.

Если a=1, тогда для $n = V(b+1)+1$ не существует требуемого k. Если b=1, тогда для $n = V(a+1)+1$ не существует требуемого k (рассмотрите отдельно два случая, когда k четно и когда k нечетно).

***Свойство* 2.** Если $(a;b) \in I$, тогда $V(a-1) \leq V(b+1)$.

Доказательство. От противного, предположим $V(a-1) > V(b+1)$. Тогда $V(a^k+b) = V(a^k-1+b+1) = V(b+1)$ для любого k. Следовательно, не существует требуемого k для $n = V(a-1)$, значит, пара $(a;b)$ не интересна.

***Свойство* 3.** Если $(a;b) \in I$ и $V(a-1) = V(b+1)$, тогда $V(a+1) = V(b-1)$.

Доказательство. По Свойству 1 мы имеем $V(a-1) = V(b+1) \geq 1$.

Если $V(a-1) = V(b+1) > 1$, тогда $V(a+1) = 1 = V(b-1)$.

Если $V(a-1) = V(b+1) = 1$, тогда $a \equiv 3 \bmod 4$ и $b \equiv 1 \bmod 4$, и $4|a^k+b$ влечет, что k нечетно. Тогда $a^k + 1 = (a+1)(a^{k-1} - a^{k-2} + ... - a + 1)$, где вторая скобка очевидно дает нечетное число. Значит, $V(a^k + 1) = V(a+1)$. Если $V(b-1) < V(a+1)$ тогда $V(a^k+b) = V(a^k+1+b-1) = V(b-1)$, следовательно, для $n = V(a+1)$ не нашлось бы требуемого k. Если $V(b-1) > V(a+1)$, тогда мы имели бы $V(a^k+b) = V(a^k+1+b-1) = V(a+1)$, что невозможно для $n \geq V(a+1)+1$. Значит, $V(a+1)=V(b-1)$.

***Свойство* 4.** Если a и b – нечетные числа, большие 1, $V(a-1) = V(b+1)$ и $V(a+1) = V(b-1)$, тогда $(a;b)\in I$.

Доказательство. Пусть $m=\max\{V(a-1), V(a+1)\}$; очевидно, $m > 1$. (Заметим для будущего, что тогда одно из чисел $V(a-1)$, $V(a+1)$ равно m, а другое равно 1; значит, $V(a-1)+V(a+1)=m+1$.) Теперь мы имеем $a+b = a+1+b-1 = a-1+b+1 ⋮ 2^{m+1}$.

Пусть для $n=s\geq m+1$ существует k такое, что $a^k+b ⋮ 2^s$. Тогда мы докажем, что существует неотрицательное целое число l такое, что $a^{k+l}+b ⋮ 2^{s+1}$ (это – шаг индукции в доказательстве того, что пара $(a;b)$ интересна).

Пусть $a^k+b=2^s a_1$, где $a_1\in N$. Если a_1 четно, тогда мы можем полагать $l=0$. Если a_1 нечетно, тогда поскольку

$$a^{k+l}+b=a^l(a^k+b)-b(a^l-1)=a^l\cdot 2^s\cdot a_1-b(a^l-1), \qquad (1)$$

мы можем полагать $l=2^{s-m}$, и принимая во внимание

$$V(a^{2^{s-m}}-1)=V(a-1)+V(a+1)+V(a^{2^1}+1)+...+V(a^{2^{s-m-1}}+1)=m+1+\underbrace{1+...+1}_{s-m-1 \text{ раз}}=s, \qquad (2)$$

мы заключаем из (1) и (2), что $a^{k+l}+b ⋮ 2^{s+1}$. Таким образом, шаг индукции завершен и свойство доказано.

***Свойство* 5.** Если $(a;b)\in I$ и $V(b+1)> V(a-1)$, тогда $V(b+1)\geq V(a^2-1)$.

Доказательство. Заметим сначала, что $V(b+1)> V(a-1)\geq 1$. Если $V(a-1)>1$, тогда $V(a+1)=1$ и $V(b+1)\geq V(a-1)+V(a+1)= V(a^2-1)$.

Теперь, пусть $V(a-1)=1$. Если k нечетно, тогда $V(a^k+b) = V(a^k-1+b+1) = V(a^k-1)= V(a-1)=1$, значит каждое k, дающее $V(a^k+b)>1$ должно быть четным. Тогда из $(a;b)\in I$ следует, что $(a^2;b)\in I$. И, наконец, по Свойству 2 получаем $V(b+1)\geq V(a^2-1)$.

***Свойство* 6.** Если a и b – нечетные числа, большие 1 и $V(b+1)\geq V(a^2-1)$, тогда $(a;b)\in I$.

Доказательство. Используя (2) для $s-m=l>0$, получаем

$$V(a^{2^l}-1)=V(a-1)+V(a+1)+l-1,$$

которое может быть переписано как $l=V(a^{2^l}-1)+1-V(a^2-1)$.

Как следствие неравенства $V(b+1)\geq V(a^2-1)$, найдется l такое, что $V(b+1)=V(a^{2^l}-1)$ (можно просто взять $l=V(b+1)+1-V(a^2-1)$). Поскольку $V(b+1)=V(a^{2^l}-1)>1$, имеем $V(b-1)=1=V(a^{2^l}+1)$. По Свойству 4 это означает, что $\left(a^{2^l};b\right)\in I$ и, очевидно, $(a;b)\in I$.

Эти свойства непосредственно дают ответ задачи.

Ответ: $(2^\alpha x-1, 2^\alpha y+1)$, $(2^\alpha x-1, 2^\beta y-1)$, $(2^\alpha x+1, 2^\alpha y-1)$ и $(2^\alpha x+1, 2^\beta y-1)$, где $x, y\in N$ – нечетные и $1<\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in N$.